

## Übungen zu Kugelfunktionen

### Berechnung des Feldes aus Gaußkoeffizienten

Das Potential des Magnetfeldes bei Berücksichtigung interner Quellen lautet in  $r > a$

$$V = a \sum_{n=1}^L \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\theta). \quad (1)$$

Wir beschränken uns auf den Dipolanteil, setzen  $L = 1$ , und erhalten

$$V^D = \frac{a^3}{r^2} \left[ g_1^0 P_1^0(\theta) + (g_1^1 \cos \varphi + h_1^1 \sin \varphi) P_1^1(\theta) \right]. \quad (2)$$

- Vereinfachen Sie den Ausdruck für  $V^D$ , indem Sie  $P_1^0(\theta)$  und  $P_1^1(\theta)$  durch Winkelfunktionen ersetzen
- Berechnen Sie aus  $V^D$  die magnetischen Komponenten  $X, Y, Z$
- Berechnen Sie mittels der aus dem IGRF-13 abgelesenen Gaußkoeffizienten  $g_1^0 = -29404.8$ ,  $g_1^1 = -1450.9$ ,  $h_1^1 = 4652.5$  (alle in nT) das Dipolmagnetfeld für Freiberg (50.9248N, 13.3297E, Höhe 400 m)
- Berechnen Sie aus den Komponenten des Magnetfeldes die Inklination und Deklination

Achtung: Nördl. geogr. Breite =  $90^\circ - \theta$

### Ermittlung der Gaußkoeffizienten

Zur Berechnung der Gaußkoeffizienten nutzen wir die Tatsache aus, dass zwischen den Komponenten und den Gaußkoeffizienten eine lineare Beziehung besteht. Wir können also für erdmagnetische Beobachtungen die Formulierung  $\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{m}$  mit

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a/r_i)^3 \frac{\partial P_1^0(\theta_i)}{\partial \theta} & \dots \\ \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^0 \\ g_1^1 \\ h_1^1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

ansetzen, wobei  $\mathbf{m} = [g_1^0, g_1^1, h_1^1]^\top$  usw.

Folgende Magnetfeldmessungen liegen vor:

| Ort           | $\theta$ | $\varphi$ | Komp. | Abl. in nT |
|---------------|----------|-----------|-------|------------|
| Sydney        | 123.87   | 151.02    | X     | 24766.7    |
| Cape Town     | 123.97   | 18.47     | Y     | 9669.7     |
| London        | 38.53    | -0.1      | Z     | 44457.5    |
| San Francisco | 52.22    | -122.37   | X     | 22924.6    |
| São Paulo     | 112.72   | -43.45    | Y     | -6938.1    |
| Beijing       | 50.1     | 116.37    | Z     | 46253.7    |

- Stellen Sie den Datenvektor  $\mathbf{d}$  auf
- Ermitteln Sie die Einträge in der Matrix  $\mathbf{A}$  unter Berücksichtigung der Koordinaten der Messorte ( $a = R_E$ ,  $r = a$ )

- Berechnen Sie  $\mathbf{m} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{d}$ .
- Vergleichen Sie mit den im IGRF-13 angegebenen Werten
- Bewerten Sie die Genauigkeit