



Hochschule
Zittau/Görlitz
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Formelsammlung

Technische Thermodynamik und Wärmeübertragung

Fakultät Maschinenwesen
Fachgebiet Technische Thermodynamik

von
Prof. Dr.-Ing. habil. H.-J. Kretzschmar
Dr.-Ing. S. Herrmann

Ausgabe: Wintersemester 2019/20

Fachgebiet Technische Thermodynamik
 Prof. Dr.-Ing. habil. H.-J. Kretzschmar
 Dr.-Ing. S. Herrmann

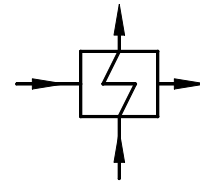
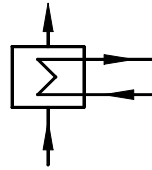
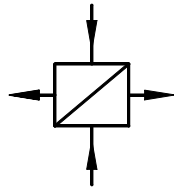
Formelsammlung

Technische Thermodynamik und Wärmeübertragung

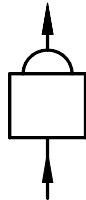
	Seite
Schaltbilder für Bauelemente der Energietechnik (DIN 2481)	IV
Internationales Einheitensystem "SI"	VI
Lineare Interpolation von Tabellenwerten	VII
Größen	1/1
Thermische Zustandsgrößen	2/1
Energetische Zustandsgrößen	3/1
Entropie S	4/1
Exergie E	5/1
Massebilanz	7/1
Energiebilanz – I. Hauptsatz der Thermodynamik	8/1
Entropiebilanz – II. Hauptsatz der Thermodynamik	9/1
Exergiebilanz	10/1
Eindimensionale stationäre Wärmeleitung ohne Wärmequellen ($\lambda = \text{const}$)	12/1
Eindimensionaler stationärer Wärmedurchgang ($\lambda, \alpha = \text{const}$)	13/1
Konvektiver Wärmeübergang	14/1
Wärmestrahlung	15/1

Schaltbilder für Bauelemente der Energietechnik (DIN 2481)

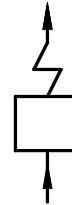
Wärmeüber-
trager als
Rekuperator
allgemein
(Wärme-
taucher)



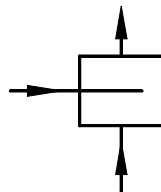
Verdampfer
(Kessel)



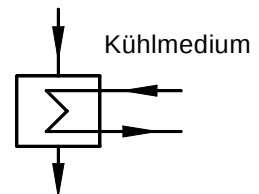
Verdampfer (Kessel)
mit Überhitzer



Mischwärme-
übertrager



Kondensator



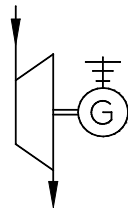
Verdichter
allgemein



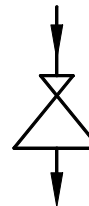
Pumpe
allgemein



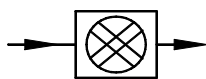
Turbine mit
Generator
- Dampfturbine
- Gasturbine
- Wasserturbine



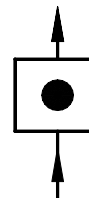
Drosselventil
(Druckminder-
ventil)



Brennkammer
für Gase



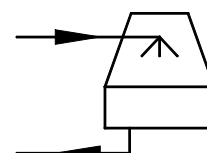
Kernreaktor



Wärmever-
braucher
mit Heizflächen

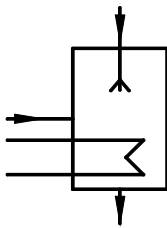


Kühlturm

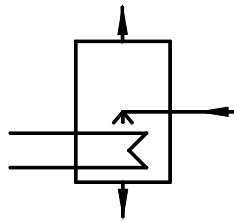


Schaltbilder für weitere Bauelemente (DIN 2481)

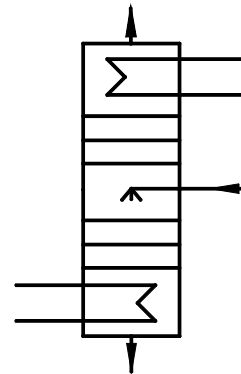
Absorber



Austreiber (Kocher)



Gekoppelte Rektifiziersäule

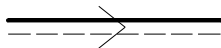


Rohrleitungen für Schaltungen der Energietechnik (DIN 2481)

Wasser



Luft



Verbrennungsgase



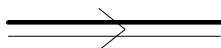
Dampf



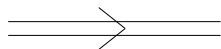
Feste Brennstoffe



Brenngase



Heizöl



Internationales Einheitensystem "SI"

Größe	SI-Einheit	empfohlene Einheit
Länge z	1 m	1 m
Zeit t	1 s	1 s
Masse m	1 kg	1 kg
Stoffmenge (Molmenge) n	1 mol	1 kmol = 1000 mol
Thermodynamische Temperatur T	1 K	1 K
Kraft F	$1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$	1 kN = 1000 N
Druck p	$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ $1 \text{ bar}^* = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ $1 \text{ bar}^* = 100 \text{ kPa} = 0,1 \text{ MPa}$ $1 \text{ bar}^* \approx 0,986923 \text{ atm}$ $1 \text{ Pa} \approx 0,0075 \text{ Torr}$ $1 \text{ Pa} \approx 0,0075 \text{ mmHg}$ $1 \text{ Pa} \approx 0,10197 \text{ mmWS}$	$1 \text{ kPa} = 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ $1 \text{ kPa} = 0,01 \text{ bar}^*$
Enthalpie H Innere Energie U Exergie E Wärme Q Arbeit W	$1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 1 \text{ W s}$	$1 \text{ kJ} = 1 \text{ kN m} = 1 \text{ kW s}$
Spezifische Enthalpie h Spezifische innere Energie u Spezifische Exergie e Spezifische Wärme q Spezifische Arbeit w	$1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 1 \frac{\text{N m}}{\text{kg}} = 1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$	$1 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 1000 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$
Enthalpiestrom $\dot{H}$ Exergiestrom $\dot{E}$ Wärmestrom $\dot{Q}$ Arbeitsleistung P	$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{N m}}{\text{s}}$	$1 \text{ kW} = 1 \frac{\text{kJ}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{kN m}}{\text{s}}$
Spezif. Wärmekapazitäten c_p, c_v Spezifische Entropie s Spezifische Gaskonstante R	$1 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 1 \frac{\text{N m}}{\text{kg K}}$	$1 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} = 1 \frac{\text{kN m}}{\text{kg K}}$
Entropiestrom $\dot{S}$ Wärmekapazitätsstrom $\dot{C}$	$1 \frac{\text{W}}{\text{K}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s K}} = 1 \frac{\text{N m}}{\text{s K}}$	$1 \frac{\text{kW}}{\text{K}} = 1 \frac{\text{kJ}}{\text{s K}} = 1 \frac{\text{kN m}}{\text{s K}}$

* "bar" – in der Technik oft verwendete Einheit für Druckangaben

Lineare Interpolation von Tabellenwerten

Eindimensionale Interpolation $z = f(x)$

Tabelle mit x- und z-Werten

	x	z
	.	.
	.	.
	.	.
x_{geg}	x_1	z_1
zwischen		
x_1 und x_2	x_2	z_2
	.	.
	.	.
	.	.

$z_{\text{ges}} = f(x_{\text{geg}})$

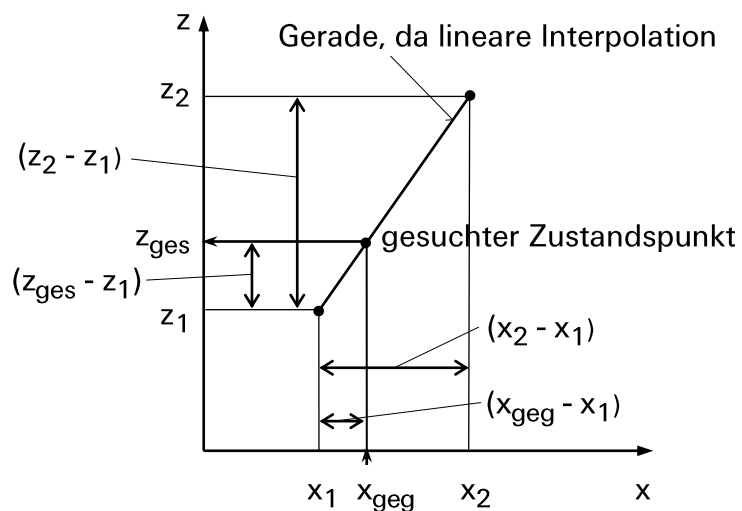
Indizes

geg → gegeben
ges → gesucht
1,2 → Tabellenwerte

Interpolationsformel

$$z_{\text{ges}} = z_1 + \frac{(x_{\text{geg}} - x_1)}{(x_2 - x_1)} \cdot (z_2 - z_1) \quad (0.1)$$

Veranschaulichung mit Strahlensatz



Verhältnisgleichung

$$\frac{(x_{\text{geg}} - x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(z_{\text{ges}} - z_1)}{(z_2 - z_1)}$$

Zweidimensionale Interpolation $z = f(x,y)$

Tabelle mit z-Werten im x,y-Raster

		x_{geg} zwischen x_1 und x_2	
		 x_1	x_2
y_{geg} zwischen y_1 und y_2	y_1	 z_{11} $\Downarrow$ z_1	z_{12} $\Downarrow$ z_2
		$\Rightarrow z_{\text{ges}} \Leftarrow$	
	y_2	$\Uparrow$ z_{21}	z_{22} $\Uparrow$

Indizes

geg → gegeben

ges → gesucht

1,2 → Tabellenwerte

Interpolationsformeln

$$x_1 = \text{const} : \quad z_1 = z_{11} + \frac{(y_{\text{geg}} - y_1)}{(y_2 - y_1)} \cdot (z_{21} - z_{11}) \quad (0.2)$$

$$x_2 = \text{const} : \quad z_2 = z_{12} + \frac{(y_{\text{geg}} - y_1)}{(y_2 - y_1)} \cdot (z_{22} - z_{12}) \quad (0.3)$$

$$y_{\text{geg}} = \text{const} : \quad z_{\text{ges}} = z_1 + \frac{(x_{\text{geg}} - x_1)}{(x_2 - x_1)} \cdot (z_2 - z_1) \quad (0.4)$$

Größen

		Umrechnung	Beispiele
spezifische Größe Z: (massebezogen)	$z = \frac{Z}{m} \quad (1.1)$		v, u, h, s, c_p, q, w
Zeitbezogene Größe Z (Strom):	$\dot{Z} = \frac{dZ}{dt} \quad (1.2)$	$\dot{Z} = \dot{m} \cdot z \quad (1.3)$	$\dot{m}, \dot{n}, \dot{V}, \dot{H}, \dot{Q}, \dot{W} = P$
Volumenbezogene Größe Z:	$\tilde{z} = \frac{Z}{V} \quad (1.4)$	$\tilde{z} = \rho \cdot z \quad (1.5)$	$\rho = \tilde{m}, \tilde{q}$
Molare Größe Z:	$\bar{z} = Z_m = \frac{Z}{n} \quad (1.6)$	$\bar{z} = M \cdot z \quad (1.7)$	$\bar{v}, \bar{h}, \bar{s}, \bar{q}, \bar{w}$
Flächenbezogene Größe Z:	$\hat{z} = \frac{Z}{A} \quad (1.8)$		$\hat{q}$
Stromdichte:	$\hat{z} = \frac{\dot{Z}}{A} \quad (1.9)$		$\hat{q}, \hat{m}$

Temperatur

		Maßeinheit	Umrechnung
Thermodyn. (KELVIN)-Temp.:	T	$[T] = K$	
CELSIUS-Temp.:	ϑ	$[\vartheta] = ^\circ C$	$\frac{\vartheta}{^\circ C} = \frac{T}{K} - 273,15 \quad (1.10)$
FAHRENHEIT-Temp.:	ϑ_F	$[\vartheta_F] = ^\circ F$	$\frac{\vartheta_F}{^\circ F} = \frac{9}{5} \cdot \frac{T}{K} - 459,67 \quad (1.11)$
RANKINE-Temp.:	T_R	$[T_R] = ^\circ R$	$\frac{T_R}{^\circ R} = \frac{9}{5} \cdot \frac{T}{K} \quad (1.12)$
Temperaturdifferenz:	ΔT	$[\Delta T] = [\Delta \vartheta] = K$	$\Delta T = \Delta \vartheta \quad (1.13)$

Druck

$$p = \frac{F_n}{A} \quad (1.14), \quad [p] = 1 \text{ kPa} = 0,01 \text{ bar}$$

Überdruck:
$$\Delta p_{\text{üb}} = p - p_u \quad (1.15)$$
 p_u - barometrischer Druck der Umgebung

Unterdruck:
$$\Delta p_{\text{un}} = p_u - p \quad (1.16)$$

Relatives Vakuum:
$$v_a = \frac{\Delta p_{\text{un}}}{p} \quad (1.17)$$

Statischer Druck einer Flüssigkeitssäule

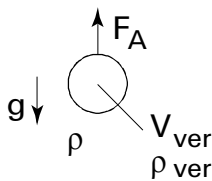
$$\Delta p = \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot \Delta z_{\text{FL}} \quad (1.18)$$

ρ_{Fl} → Dichte der Flüssigkeit

Δz_{Fl} → Höhe der Flüssigkeitssäule

Resultierende Auftriebskraft

$$F_A = g \cdot V_{\text{ver}} \cdot (\rho - \rho_{\text{ver}}) \quad (1.19)$$



V_{ver} → Volumen des verdrängenden Körpers

ρ_{ver} → Dichte des verdrängenden Körpers

ρ → Dichte des Fluids der Umgebung

Normzustand n

$$p_n = 101,325 \text{ kPa} = 1,01325 \text{ bar} = 1 \text{ atm} = 760 \text{ Torr}$$

$$T_n = 273,15 \text{ K}, \vartheta_n = 0 \text{ °C}$$

$$v_n = \frac{1}{\rho_n} \text{ bei } p_n, T_n \text{ des Fluids}$$

Thermische Zustandsgrößen

Spezifisches Volumen v und Dichte ρ

Dichte: $\rho = \frac{1}{v}$ (2.1)

Reales Fluid

$$\left. \begin{array}{l} v = f(p, T) \\ \rho = f(p, T) \end{array} \right\} \rightarrow \text{technische Formulierung}$$

$\nearrow$ z. B. WDT, Stoffwerte

$p = f(T, v) \rightarrow$ physikalische Formulierung

Realgasfaktor $z_{\text{real}} = \frac{p \cdot v}{R \cdot T}$ (2.2)

Differenz für Zustandsänderung ① $\rightarrow$ ②

$$v_2 - v_1 = v(p_2, T_2) - v(p_1, T_1) \quad (2.3)$$

$v(p, T) \nearrow$ z. B. WDT, Stoffwerte

Ideales Gas

Zustandsgleichung des idealen Gases: $p \cdot V = m \cdot R \cdot T$ (2.4)

$$p \cdot v = R \cdot T \quad (2.5)$$

$$p \cdot \bar{v} = \bar{R} \cdot T \quad (2.6)$$

$$p \cdot \bar{v} = M \cdot R \cdot T \quad (2.7)$$

$$p \cdot V = n \cdot \bar{R} \cdot T \quad (2.8)$$

Spezifisches Volumen: $v^{\text{ig}} = \frac{R \cdot T}{p}$ (2.9)

Dichte: $\rho^{\text{ig}} = \frac{p}{R \cdot T}$ (2.10)

Spezifische Gaskonstante eines Stoffes:

$$R = \frac{\bar{R}}{M} \quad (2.11), \quad \bar{R} = R_m \nearrow \text{Stoffwerte}$$

$M \rightarrow$ Molare Masse des Stoffes $M = \frac{m}{n}$ (2.12)

$R, M \nearrow$ Stoffwerte

Strömendes ideales Gas: $p \cdot \dot{V} = \dot{m} \cdot R \cdot T$ (2.13)

Differenz für Zustandsänderung ① $\rightarrow$ ②

$$v_2 - v_1 = R \left(\frac{T_2}{p_2} - \frac{T_1}{p_1} \right) \quad (2.14)$$

Inkompressible (ideale) Flüssigkeiten und Festkörper

$$v^{\text{if}}_{\text{nur}} = f(T)$$

$$v^{\text{if}}(T) = \frac{1}{\rho^{\text{if}}(T)} \quad (2.15)$$

$\rho^{\text{if}}(T)$ ↗ Stoffwerte

Differenz für Zustandsänderung ① → ②

$$v_2 - v_1 = \frac{1}{\rho^{\text{if}}}(T_2) - \frac{1}{\rho^{\text{if}}}(T_1) \quad (2.16)$$

$\rho^{\text{if}}(T)$ ↗ Stoffwerte

Näherung

$$v^{\text{if}}_{\text{nur}} = v'(T) \quad (2.17)$$

$v'(T)$ ↗ z. B. WDT

Differenz für Zustandsänderung ① → ②

$$v_2 - v_1 = v'(T_2) - v'(T_1) \quad (2.18)$$

$v'(T)$ ↗ Stoffwerte

Berechnung mit Isobarem Volumenausdehnungskoeffizienten

$$v^{\text{if}}(T) = v_o \left[1 + \alpha_p \cdot (T - T_o) \right] \quad (2.19)$$

α_p → Isobarer Volumenausdehnungskoeffizient ($\alpha_p = \beta$) ↗ Stoffwerte
(Mittelwert im Temperaturbereich $T_o \dots T$)

Berechnung mit Längenausdehnungskoeffizienten

für Länge $L \gg$ Querschnitt bei Festkörpern

$$L(T) = L_o \left[1 + \alpha_{\text{lin}} \cdot (T - T_o) \right] \quad (2.20)$$

α_{lin} → Längenausdehnungskoeffizient
(Mittelwert im Temperaturbereich $T_o \dots T$)

Energetische Zustandsgrößen

Isobare Wärmekapazität C_p

Isochore Wärmekapazität C_v

$$c_p = \frac{C_p}{m} \quad (3.1)$$

Definition

$$c_v = \frac{C_v}{m} \quad (3.2)$$

$$c_p := \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (3.3)$$

$$c_v := \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad (3.4)$$

Reales Fluid

$$c_p = f(T, p), \quad c_p = f(T, v)$$

$$c_v = f(T, p), \quad c_v = f(T, v)$$

↗ z. B. WDT

Ideales Gas

$$c_p^{ig} = \frac{5}{2} \cdot R \quad (3.5)$$

Einatomige Gase $c_v^{ig} = \frac{3}{2} \cdot R \quad (3.6)$

Mehratomige Gase

$$c_p^{ig \text{ nur}} = f(T)$$

↗ Stoffwerte

$$c_p^{ig} = c_v^{ig} + R \quad (3.7) \quad c_v^{ig \text{ nur}} = f(T)$$

Berechnung mit Isentropenexponenten κ

Temperaturunabhängige Festwerte als Näherung			
Einatomige ideale Gase	$\kappa = 1,66\bar{6}$	(exakt)	(3.8)
Zweiatomige ideale Gase	$\kappa = 1,4$	(gute Näherung) z. B. Luft	
Dreiatomige ideale Gase	$\kappa = 1,3$	(grobe Näherung)	

$$c_p^{ig} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot R \quad (3.9)$$

$$c_p^{ig} = \kappa \cdot c_v^{ig} \quad (3.10)$$

$$c_v^{ig} = \frac{1}{\kappa - 1} \cdot R \quad (3.11)$$

Isobare Wärmekapazität C_p

Isochore Wärmekapazität C_v

Ideale Flüssigkeiten und Festkörper

$$c_p^{\text{if}} = f(T)$$

↗ Stoffwerte

Näherung

$$c_p^{\text{if}} \cong c_p'(T)$$

↗ z. B. WDT

$$c_v^{\text{if}} = f(T)$$

Näherung

$$c_v^{\text{if}} \cong c_v'(T)$$

↗ z. B. WDT

Gute Näherung

$$c_v^{\text{if}} \approx c_p^{\text{if}}$$

Enthalpie H

Innere Energie U

Definition

$$H := U + p \cdot V \quad (3.12)$$

$U \rightarrow$ Energiegehalt eines Systems

$$h = \frac{H}{m} \quad (3.13), \quad \dot{H} = \dot{m} \cdot h \quad (3.14)$$

$$u = \frac{U}{m} \quad (3.15), \quad \dot{U} = \dot{m} \cdot u \quad (3.16)$$

Reales Fluid

$$h = f(p, T) \quad , \quad h = f(T, v)$$

↗ z. B. WDT

$$u = f(p, T) \quad , \quad u = f(T, v)$$

$$u = h - p \cdot v \quad (3.17)$$

Differenz für Zustandsänderung ① $\rightarrow$ ②

$$h_2 - h_1 = h(p_2, T_2) - h(p_1, T_1) \quad (3.18) \quad u_2 - u_1 = \left[h(p_2, T_2) - h(p_1, T_1) \right] - \left[p_2 \cdot v(p_2, T_2) - p_1 \cdot v(p_1, T_1) \right] \quad (3.19)$$

$h(p, T)$ ↗ z. B. WDT

$v, h(p, T)$ ↗ z. B. WDT

Enthalpie H

Innere Energie U

Ideales Gas

$$h^{\text{ig}} = f(T)$$

$$u^{\text{ig}} = f(T)$$

$$u^{\text{ig}} = h^{\text{ig}} - R \cdot T \quad (3.20) \quad h^{\text{ig}}(T) \nearrow \text{Stoffwerte}$$

$$h^{\text{ig}} = h_0^{\text{ig}} + \int_{T_0}^T c_p^{\text{ig}}(T) dT \quad (3.21)$$

$$u^{\text{ig}} = u_0^{\text{ig}} + \int_{T_0}^T c_v^{\text{ig}}(T) dT \quad (3.22)$$

$$h^{\text{ig}} = f(T) \nearrow \text{Stoffwerte, berechnet für } T_0 = 273,15 \text{ K und } h_0^{\text{ig}} = 0,$$

$$\text{Ausnahme Wasserdampf: } h_0^{\text{ig}} = 2500,93 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Differenz für Zustandsänderung ① → ②

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p^{\text{ig}}(T) \cdot dT \quad (3.23)$$

$$u_2 - u_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v^{\text{ig}}(T) \cdot dT \quad (3.24)$$

$$h_2 - h_1 = h^{\text{ig}}(T_2) - h^{\text{ig}}(T_1) \quad (3.25)$$

$h^{\text{ig}}(T) \nearrow \text{Stoffwerte}$

$$u_2 - u_1 = h^{\text{ig}}(T_2) - h^{\text{ig}}(T_1) - R \cdot (T_2 - T_1) \quad (3.26)$$

$h^{\text{ig}}(T) \nearrow \text{Stoffwerte}$

mit Mittelwerten c_{pm}^{ig} bzw. $c_{vm}^{\text{ig}} = \text{const}$

$$h^{\text{ig}} = h_0^{\text{ig}} + c_p^{\text{ig}} \Big|_{T_0}^T (T - T_0) \quad (3.27)$$

$$u^{\text{ig}} = u_0^{\text{ig}} + c_v^{\text{ig}} \Big|_{T_0}^T (T - T_0) \quad (3.28)$$

Mittelwert $c_p^{\text{ig}} \Big|_{T_0}^T$ bzw. $c_v^{\text{ig}} \Big|_{T_0}^T$ zwischen T_0 und T

$$c_p^{\text{ig}} \Big|_{T_0}^T = \frac{1}{T - T_0} \cdot \int_{T_0}^T c_p^{\text{ig}}(T) \cdot dT \quad (3.29)$$

$\nearrow \text{Stoffwerte}$

$$c_v^{\text{ig}} \Big|_{T_0}^T = c_p^{\text{ig}} \Big|_{T_0}^T - R \quad (3.30)$$

Differenz für Zustandsänderung ① → ②

$$h_2 - h_1 = c_{pm}^{\text{ig}} \cdot (T_2 - T_1) \quad (3.31)$$

$$u_2 - u_1 = c_{vm}^{\text{ig}} \cdot (T_2 - T_1) \quad (3.32)$$

$$c_{pm}^{\text{ig}} = c_{pm}^{\text{ig}} \Big|_{T_1}^{T_2} = \frac{c_p^{\text{ig}} \Big|_{T_0}^{T_2} \cdot (T_2 - T_0) - c_p^{\text{ig}} \Big|_{T_0}^{T_1} \cdot (T_1 - T_0)}{(T_2 - T_1)} \quad (3.33)$$

Näherung für kleine Differenz ($T_2 - T_1$):

$$c_{vm}^{\text{ig}} = c_{pm}^{\text{ig}} - R$$

$$c_{pm}^{\text{ig}} = c_{pm}^{\text{ig}} \Big|_{T_1}^{T_2} \approx \frac{1}{2} \cdot [c_p^{\text{ig}}(T_1) + c_p^{\text{ig}}(T_2)] \quad (3.34)$$

$$c_p^{\text{ig}} \Big|_{T_0}^T, c_p^{\text{ig}}(T) \nearrow \text{Stoffwerte}$$

Enthalpie H

Innere Energie U

Ideale Flüssigkeiten und Festkörper

$$h^{if} = f(T)$$

$$h^{if} = h_o^{if} + \int_{T_o}^T c_p^{if}(T) dT \quad (3.35)$$

$$h^{if} = f(T) \nearrow \text{Stoffwerte,}$$

für Wasser berechnet für $T_o = 273,15 \text{ K}$ und $h_o^{if} = 0$,

Differenz für Zustandsänderung ① → ②

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p^{if}(T) dT \quad (3.38)$$

$$h_2 - h_1 = h^{if}(T_2) - h^{if}(T_1) \quad (3.40)$$

$h^{if}(T) \nearrow \text{Stoffwerte}$

$$u^{if} = u_o^{if} + \int_{T_o}^T c_v^{if}(T) dT \quad (3.36)$$

$$u^{if} = h^{if}(T) - p \cdot v^{if}(T) \quad (3.37)$$

$h^{if}(T), v^{if}(T) \nearrow \text{Stoffwerte}$

$$u_2 - u_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v^{if}(T) dT \quad (3.39)$$

$$u_2 - u_1 = h^{if}(T_2) - h^{if}(T_1) - (p_2 \cdot v^{if}(T_2) - p_1 \cdot v^{if}(T_1)) \quad (3.41)$$

$h^{if}(T), v^{if}(T) \nearrow \text{Stoffwerte}$

mit Mittelwerten $c_{pm}^{if} = \text{const}$

$$h^{if} = h_o^{if} + c_p^{if} \Big|_{T_o}^T (T - T_o) \quad (3.42)$$

Mittelwert $c_p^{if} \Big|_{T_o}^T$ zwischen T_o und T

$$c_p^{if} \Big|_{T_o}^T = \frac{1}{T - T_o} \cdot \int_{T_o}^T c_p^{if}(T) dT \quad (3.43)$$

$\nearrow \text{Stoffwerte}$

Differenz für Zustandsänderung ① → ②

$$h_2 - h_1 = c_{pm}^{if} \cdot (T_2 - T_1) \quad (3.44)$$

$$u_2 - u_1 = c_{vm}^{if} \cdot (T_2 - T_1) \quad (3.45)$$

$$c_{pm}^{if} = c_{pm}^{if} \Big|_{T_1}^{T_2} = \frac{c_p^{if} \Big|_{T_o}^{T_2} \cdot (T_2 - T_o) - c_p^{if} \Big|_{T_o}^{T_1} \cdot (T_1 - T_o)}{(T_2 - T_1)} \quad (3.46)$$

Grobe Näherung:

$$c_{vm}^{if} \approx c_{pm}^{if}$$

Näherung für kleine Differenz $(T_2 - T_1)$:

$$c_{pm}^{if} = c_{pm}^{if} \Big|_{T_1}^{T_2} \approx \frac{1}{2} \cdot [c_p^{if}(T_1) + c_p^{if}(T_2)] \quad (3.47) \quad c_p^{if} \Big|_{T_o}^T, c_p^{if}(T) \nearrow \text{Stoffwerte}$$

Näherungen für $T < 0,8 \cdot T_c \nearrow \text{Stoffwerte}$

$$h^{if} = h'(T)$$

$h' \nearrow \text{z. B. WDT}$

$$u^{if} = h'(T) - p \cdot v'(T) \quad (3.48)$$

$v', h' \nearrow \text{z. B. WDT}$

Differenz für Zustandsänderung ① → ②

$$h_2 - h_1 = h'(T_2) - h'(T_1) \quad (3.49)$$

$h'(T) \nearrow \text{z. B. WDT}$

$$u_2 - u_1 = h'(T_2) - h'(T_1) - [p_2 \cdot v'(T_2) - p_1 \cdot v'(T_1)] \quad (3.50)$$

$v', h'(T) \nearrow \text{z. B. WDT}$

Entropie S

Spezifische Entropie

$$s = \frac{S}{m} \quad (4.1)$$

Entropiestrom

$$\dot{S} = \dot{m} \cdot s \quad (4.2)$$

Definition der Entropie:

Form mit H:

$$dS = \frac{dH - Vdp}{T} \quad (4.3)$$

Form mit U:

$$dS = \frac{dU + pdV}{T} \quad (4.4)$$

Reales Fluid

$$s = f(p, T) \nearrow \text{z. B. WDT} \quad \text{bzw.} \quad s = f(T, v)$$

Differenz für Zustandsänderung ① → ②

$$s_2 - s_1 = s(p_2, T_2) - s(p_1, T_1) \quad (4.5)$$

$$s = f(p, T) \nearrow \text{z. B. WDT}$$

Ideales Gas

$$s^{ig} = f(p, T)$$

$$s^{ig} = f(T, v)$$

$$s^{ig} = s_o^{ig} + \int_{T_o}^T \frac{c_p^{ig}(T)}{T} dT - R \cdot \ln\left(\frac{p}{p_o}\right) \quad (4.6)$$

$$s^{ig} = s_o^{ig} + \int_{T_o}^T \frac{c_v^{ig}(T)}{T} dT + R \cdot \ln\left(\frac{v}{v_o}\right) \quad (4.7)$$

$$\boxed{s^{ig} = s_T^{ig} - R \cdot \ln\left(\frac{p}{p_o}\right)} \quad (4.8) \quad \text{mit } s_T^{ig} = s_o^{ig} + \int_{T_o}^T \frac{c_p^{ig}(T)}{T} dT \quad (4.9)$$

$$s_T^{ig} = f(T) \nearrow \text{Stoffwerte, berechnet für: } s_o^{ig} = 0 \text{ bei } T_o = 273,15 \text{ K}$$

$$\text{Ausnahmen - Wasserdampf: } s_o^{ig} = 9,1559 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$\text{- Luft: } s_o^{ig} = 0,16196 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Empfehlung:

$$p_o = p_U = 0,101325 \text{ MPa}$$

Ausnahme Wasser

$$p_o = 0,61121 \text{ kPa}$$

Differenz für Zustandsänderung ① → ②

$$\boxed{s_2 - s_1 = s_T^{ig}(T_2) - s_T^{ig}(T_1) - R \cdot \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)} \quad (4.10)$$

$$s_T^{ig}(T) \nearrow \text{Stoffwerte}$$

mit Mittelwerten c_{pm}^{ig} bzw. $c_{vm}^{ig} = \text{const:}$

$$s^{ig} = s_o^{ig} + c_p^{ig} \Big|_{T_o}^T \cdot \ln\left(\frac{T}{T_o}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{p}{p_o}\right) \quad (4.11)$$

$$s^{ig} = s_o^{ig} + c_v^{ig} \Big|_{T_o}^T \cdot \ln\left(\frac{T}{T_o}\right) + R \cdot \ln\left(\frac{v}{v_o}\right) \quad (4.12)$$

Differenz für Zustandsänderung ① → ②

$$\boxed{s_2 - s_1 = c_{pm}^{ig} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)} \quad (4.13)$$

$$\boxed{s_2 - s_1 = c_{vm}^{ig} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R \cdot \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)} \quad (4.14)$$

Näherung für kleine Differenz ($T_2 - T_1$):

$$c_{pm}^{ig} = c_{pm}^{ig} \Big|_{T_1}^{T_2} \approx \frac{1}{2} \cdot [c_p^{ig}(T_1) + c_p^{ig}(T_2)] \quad (4.15)$$

$$c_{vm}^{ig} = c_{pm}^{ig} - R \quad (4.16)$$

$$c_p^{ig}(T) \nearrow \text{Stoffwerte}$$

Ideale Flüssigkeiten und Festkörper (es gilt: $v^{if} = f(T)$, $h^{if} = f(T)$)

$$s^{if} = f(p, T)$$

$$s^{if} = s_o^{if} + \int_{T_o}^T \frac{c_p^{if}(T)}{T} dT - \frac{dv^{if}}{dT}(T) \cdot (p - p_o) \quad (4.17)$$

Mit Werten für siedende Flüssigkeit:

$$s^{if} = s_T^{if}(T) - \frac{dv^{if}}{dT}(T) \cdot (p - p_o) \quad (4.18)$$

$$s^{if} = s'(T) - \frac{dv'}{dT}(T) \cdot (p - p_s(T)) \quad (4.20)$$

$p_s(T), s'(T), v'(T) \nearrow$ z. B. WDT

$$\text{mit } s_T^{if}(T) = s_o^{if} + \int_{T_o}^T \frac{c_p^{if}(T)}{T} dT \quad (4.19)$$

$$s_T^{if}(T) = f(T) \nearrow \text{Stoffwerte, Tab. 4 für Wasser, berechnet für } s_o^{if} = 0 \text{ bei } T_o = 273,15 \text{ K}$$

Differenz für Zustandsänderung ① $\rightarrow$ ②

$$s_2 - s_1 = s_T^{if}(T_2) - s_T^{if}(T_1) - \frac{dv^{if}}{dT}(T_2) \cdot (p_2 - p_1) \quad (4.21)$$

$$s_T^{if}(T) \nearrow \text{Stoffwerte oder } s_T^{if}(T) = s'(T) \nearrow \text{z. B. WDT}$$

mit Mittelwert $c_{pm}^{if} = \text{const}$:

$$s^{if} = s_o^{if} + c_p^{if} \int_{T_o}^T \ln\left(\frac{T}{T_o}\right) - \frac{dv^{if}}{dT}(T) \cdot (p - p_o) \quad (4.22)$$

Differenz für Zustandsänderung ① $\rightarrow$ ②

$$s_2 - s_1 = c_{pm}^{if} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{dv^{if}}{dT}(T_2) \cdot (p_2 - p_1) \quad (4.23)$$

$$\text{Näherung für kleine Differenz } (T_2 - T_1): \quad c_{pm}^{if} = c_{pm}^{if} \Big|_{T_1}^{T_2} \approx \frac{1}{2} \cdot [c_p^{if}(T_1) + c_p^{if}(T_2)] \quad (4.24)$$

$c_p^{if}(T) \nearrow$ Stoffwerte

Sonderfall $T_1 = T_2 = T = \text{const}$

$$s_2 - s_1 = - \frac{dv^{if}}{dT}(T) \cdot (p_2 - p_1) \quad (4.25)$$

Differentialquotient $\frac{dv^{if}}{dT}(T)$

$$\frac{dv^{if}}{dT}(T) = \frac{\beta^{if}(T)}{\rho^{if}(T)} \quad (4.26) \text{ oder Näherung: } \frac{dv^{if}}{dT}(T) \approx \frac{\frac{1}{\rho^{if}(T+\delta T)} - \frac{1}{\rho^{if}(T-\delta T)}}{(T+\delta T) - (T-\delta T)} \quad (4.27)$$

mit $\rho^{if}(T) \nearrow$ Stoffwerte, Tab. 4 für Wasser $v^{if}(T) = v'(T) \nearrow$ z. B. WDT

$\beta^{if}(T) = \alpha_v^{if}(T)$ Isobarer Volumenausdehnungskoeffizient $\nearrow$ Stoffwerte, Tab. 4 für Wasser

oder $\beta^{if}(T) = \alpha_v'(T) \nearrow$ z. B. WDT

$\delta T = 0,1 \dots 1 \text{ K}$ oder $(T+\delta T)$ und $(T-\delta T)$ als benachbarte Tabellenwerte zu T

Exergie E

spezifische Exergie
$$e = \frac{E}{m} \quad (5.1)$$

Exergiestrom
$$\dot{E} = \dot{m} \cdot e \quad (5.2)$$

Spezifische Exergie (der Enthalpie):

$$e = e_{(h)} = (h - h_u) - T_u \cdot (s - s_u) \quad (5.3)$$

h_u, s_u des betreffenden Fluids bei p_u, T_u

Differenz für Zustandsänderung ① → ②

$$e_2 - e_1 = (h_2 - h_1) - T_u \cdot (s_2 - s_1) \quad (5.4)$$

Exergie im Stoffstrom - Technische Arbeitsfähigkeit:

$$\dot{E}^{\text{st}} = \dot{m} \cdot \left(e + \frac{1}{2} c^2 + g \cdot z \right) = \dot{m} \cdot e^{\text{st}} \quad (5.5)$$

$$\text{mit } e^{\text{st}} = e + \frac{1}{2} \cdot c^2 + g \cdot z \quad (5.6)$$

Spezifische Exergie der inneren Energie $e_{(u)}$:

$$e_{(u)} = (u - u_u) - T_u \cdot (s - s_u) + p_u \cdot (v - v_u) \quad (5.7)$$

u_u, s_u, v_u des betreffenden Fluids bei p_u, T_u

Differenz für Zustandsänderung ① → ②

$$e_{(u)2} - e_{(u)1} = u_2 - u_1 - T_u \cdot (s_2 - s_1) + p_u \cdot (v_2 - v_1) \quad (5.8)$$

Massebilanz

Instationär: $\sum \dot{m}_{zu} - \sum \dot{m}_{ab} = \frac{dm}{dt} \quad (7.1)$

Sonderfall: $\dot{m}_{zu}, \dot{m}_{ab} = \text{const}$ im Zeitraum Δt

$$\boxed{(\sum \dot{m}_{zu} - \sum \dot{m}_{ab}) \cdot \Delta t = m_2 - m_1} \quad (7.2)$$

$$\text{mit } \Delta t = t_2 - t_1 \quad (7.3)$$

Stationär: $\sum \dot{m}_{zu} = \sum \dot{m}_{ab} \quad (7.4) \quad (m = \text{const im System})$

Massestrom: $\boxed{\dot{m} = \rho \cdot \dot{V}} \quad (7.5) \quad , \quad \rho = \frac{1}{v}$

Volumenstrom: $\boxed{\dot{V} = c \cdot A_q} \quad (7.6) \quad A_q \rightarrow \text{durchströmte Querschnittsfläche}$
 $c \rightarrow \text{mittlere Strömungsgeschwindigkeit über Querschnittsfläche}$

Einfache
Mischung
von Massen: $\sum m_{zu} - \sum m_{ab} = m_2 - m_1 \quad (7.7)$

Energiebilanz – I. Hauptsatz der Thermodynamik

Energiebilanz bei ruhenden geschlossenen Systemen

Instationäre Energiebilanz: $\dot{Q} + \dot{W}_V + \dot{W}_{\text{diss}} = \frac{dU}{dt}$ (8.1)

mit: $\dot{Q} = \frac{\delta Q}{dt}$ (8.2),

$\dot{W}_V = -p \frac{dV}{dt} + \dot{W}_r$ (8.3), $\dot{W}_{\text{diss}} = \frac{\delta W_{\text{diss}}}{dt}$ (8.4)

Differentielle Form

$\delta Q + \delta W_V + \delta W_{\text{diss}} = dU$ (8.5) mit $\delta W_V = -p \cdot dV + \delta W_r$ (8.6)

Allgemeine Zustandsänderung von Zeitpunkt ① bis ②

Allgemeine Form mit innerer Energie

Form mit Enthalpie

$Q_{12} + W_{V12} + W_{\text{diss}12} = U_2 - U_1$ (8.7)	$Q_{12} + \int_{p_1}^{p_2} V dp + W_{r12} + W_{\text{diss}12} = H_2 - H_1$ (8.8)
--	--

Dissipierte Arbeiten: $W_{\text{diss}12} = W_{\text{el}12} + W_{W12} + \dots$ (8.9)

Volumenänderungsarbeit: Zustandsänderung von Zeitpunkt ① bis ②

$W_{V12} = - \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV + W_{r12}$ (8.10)
--

$\delta W_V = -p \cdot dV + \delta W_r$ (8.11)

Äußere Nutzarbeit: (bei $p_u = \text{const}$)

$W_{N12} = W_{V12} + p_u \cdot (V_2 - V_1)$ (8.12)
--

$p_u \rightarrow$ barometrischer Druck in Umgebung des Kolbens

$W_{N12} = \int_{z_1}^{z_2} F_K(z) \cdot dz$ (8.13)

$F_K(z)$ - Äußere Kolbenkraft in Abhängigkeit von z
(positiv in Richtung Volumenverringern)

z - Ortskoordinate in Richtung Volumenverringern

Sonderfall: Adiabate Mischung $Q_{12} = 0$, $W_{\text{diss}12} = 0$, $W_{r12} = 0$

bei $V = \text{const}$

bei $p = \text{const}$

$\sum U_1 = U_2$ (8.14)

$\sum H_1 = H_2$ (8.15)

Energiebilanz bei offenen Systemen

Instationäre Energiebilanz: $\dot{Q} + \dot{W}^{\text{st}} + \sum \dot{H}_{\text{zu}}^{\text{st}} - \sum \dot{H}_{\text{ab}}^{\text{st}} = \frac{dU}{dt}$ (8.16)

Stationäre Energiebilanz vom Eintritt ① bis Austritt ②:

$$\dot{Q}_{12} + P_{t12}^{\text{st}} + \dot{W}_{\text{diss}12} = \sum \dot{H}_2^{\text{st}} - \sum \dot{H}_1^{\text{st}} \quad (8.17)$$

Gesamtenthalpieströme:

Eintritt $\dot{H}_1^{\text{st}} = \dot{m}_1 \cdot \left(h_1 + \frac{1}{2} \cdot c_1^2 + g \cdot z_1 \right) = \dot{m}_1 \cdot h_1^{\text{st}}$ (8.18)

Austritt $\dot{H}_2^{\text{st}} = \dot{m}_2 \cdot \left(h_2 + \frac{1}{2} \cdot c_2^2 + g \cdot z_2 \right) = \dot{m}_2 \cdot h_2^{\text{st}}$ (8.19)

Technische Nutzleistung des Fluidstroms: $P_{t12}^{\text{st}} = \dot{W}_{t12}^{\text{st}} = \dot{m} \cdot w_{t12}^{\text{st}}$ (8.20)

Spezifische technische Arbeit des Fluidstroms: $w_{t12}^{\text{st}} = \int_{p_1}^{p_2} v dp + w_{r12} + \frac{1}{2} \cdot (c_2^2 - c_1^2) + g \cdot (z_2 - z_1)$ (8.21)

Spezifische innere technische Arbeit: $w_{t12} = \int_{p_1}^{p_2} v \cdot dp + w_{r12}$ (8.22)

Sonderfall: Ein Eintritt und ein Austritt ($\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2$) – stationärer Fließprozeß

$$\dot{Q}_{12} + P_{t12}^{\text{st}} + \dot{W}_{\text{diss}12} = \dot{m} \cdot \left[(h_2 - h_1) + \frac{1}{2} \cdot (c_2^2 - c_1^2) + g \cdot (z_2 - z_1) \right] \quad (8.23)$$

Differentielle Form: $\delta q + \delta w_t^{\text{st}} + \delta w_{\text{diss}} = dh + c \cdot dc + g \cdot dz$ (8.24)

mit $\delta w_t^{\text{st}} = v \cdot dp + \delta w_r + c \cdot dc + g \cdot dz$ (8.25)

Sonderfall: Adiabate Mischung von Fluidströmen

$$\sum \dot{H}_1^{\text{st}} = \dot{H}_2^{\text{st}} \quad (8.26)$$

Entropiebilanz – II. Hauptsatz der Thermodynamik

Entropiebilanz bei ruhenden geschlossenen Systemen

Instationäre Entropiebilanz: $\dot{S}_Q + \dot{S}^{\text{irr}} = \frac{dS}{dt}$ (9.1)

Differentielle Form: $\frac{\delta Q}{T} + \delta S^{\text{irr}} = dS$ (9.2)

Quasistatische Zustandsänderung vom Zeitpunkt ① bis ②:

$S_{Q12} + S_{12}^{\text{irr}} = S_2 - S_1$

 (9.3)

$$S_{Q12} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \quad \rightarrow \text{Entropie der Wärme} \quad (9.4)$$

$$S_{12}^{\text{irr}} \quad \rightarrow \text{Entropieproduktion im System}$$

$$S_1 = m \cdot s_1 \quad \rightarrow \text{Entropie im Fluid} \quad (9.5)$$

$$S_2 = m \cdot s_2 \quad (9.6)$$

Sonderfall: Adiabate Mischung $S_{12}^{\text{irr}} = S_2 - \sum S_1$ (9.7)

Entropiebilanz bei offenen Systemen

Instationäre Entropiebilanz: $\dot{S}_Q + \sum \dot{S}_{\text{zu}} - \sum \dot{S}_{\text{ab}} + \dot{S}^{\text{irr}} = \frac{dS}{dt}$ (9.8)

Stationäre Entropiebilanz vom Eintritt ① zum Austritt ②:

$\dot{S}_{Q12} + \dot{S}_{12}^{\text{irr}} = \sum \dot{S}_2 - \sum \dot{S}_1$

 (9.9)

$$\dot{S}_{Q12} = \int_1^2 \frac{\delta \dot{Q}}{T} \quad \rightarrow \text{Entropie des Wärmestroms} \quad (9.10)$$

$$\dot{S}_{12}^{\text{irr}} \quad \rightarrow \text{Entropieproduktionsstrom im System}$$

$$\dot{S}_1 = \dot{m}_1 \cdot s_1 \quad \rightarrow \text{Entropiestrom im Fluidstrom} \quad (9.11)$$

$$\dot{S}_2 = \dot{m}_2 \cdot s_2 \quad (9.12)$$

Sonderfall: Ein Eintritt und ein Austritt ($\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2$)
stationärer Fließprozeß

$\dot{S}_{Q12} + \dot{S}_{12}^{\text{irr}} = \dot{m} \cdot (s_2 - s_1)$

 (9.13)

Differentielle Form: $\int_1^2 \frac{\delta q}{T} + \delta S^{\text{irr}} = ds$ (9.14)

Sonderfall: Adiabate Mischung von Fluidströmen $\dot{S}_{12}^{\text{irr}} = \dot{S}_2 - \sum \dot{S}_1$ (9.15)

Exergiebilanz

Exergiebilanz bei geschlossenen Systemen

Form mit Exergie der inneren Energie:

$$E_{Q12} + W_{N12} + W_{diss12} - E_{V12} = E_{(u)2} - E_{(u)1} \quad (10.1)$$

$$E_{Q12} = \int_1^2 \frac{T - T_u}{T} \delta Q \quad \rightarrow \text{Exergie der Wärme} \quad (10.2)$$

$$W_{N12} = W_{V12} + p_u \cdot (V_2 - V_1) \quad \rightarrow \text{Nutzarbeit} \quad (10.3)$$

$$W_{V12} = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV + W_{r12} \quad \rightarrow \text{Volumenänderungsarbeit} \quad (10.4)$$

$$W_{diss12} = W_{el12} + W_{W12} + \dots \quad \rightarrow \text{Dissipierte Arbeiten} \quad (10.5)$$

$$E_{v12} = T_u \cdot S_{12}^{irr} \quad \rightarrow \text{Exergieverlust im System} \quad (10.6)$$

$$E_{(u)} = m \cdot e_{(u)} \quad \rightarrow \text{Stoffgebundene Exergie der inneren Energie} \quad (10.7)$$

Form mit Exergie (der Enthalpie) bei $p = \text{const}$:

$$E_{Q12} + W_{r12} + W_{diss12} - E_{v12} = E_2 - E_1 \quad (10.8)$$

$$E = m \cdot e \quad \rightarrow \text{Stoffgebundene Exergie (der Enthalpie)}$$

Exergiebilanz bei offenen Systemen

Stationäre Exergiebilanz vom Eintritt ① bis Austritt ②:

$$\dot{E}_{Q12} + P_{t12}^{st} + \dot{W}_{diss12} - \dot{E}_{v12} = \sum \dot{E}_2^{st} - \sum \dot{E}_1^{st} \quad (10.9)$$

mit $\dot{E}_{Q12} = \int_1^2 \frac{T - T_u}{T} \cdot \delta \dot{Q} \rightarrow \text{Exergie des Wärmestroms} \quad (10.10)$

$$\dot{E}_{v12} = T_u \cdot \dot{S}_{12}^{irr} \rightarrow \text{Exergieverluststrom im System} \quad (10.11)$$

$$\dot{E}_1^{st} = \dot{m}_1 \cdot \left(e_1 + \frac{1}{2} \cdot c_1^2 + g \cdot z_1 \right) = \dot{m}_1 \cdot e_1^{st} \rightarrow \text{Exergie im Stoffstrom am Eintritt} \quad (10.12)$$

$$\dot{E}_2^{st} = \dot{m}_2 \cdot \left(e_2 + \frac{1}{2} \cdot c_2^2 + g \cdot z_2 \right) = \dot{m}_2 \cdot e_2^{st} \rightarrow \text{Exergie im Stoffstrom am Austritt} \quad (10.13)$$

Sonderfall: Ein Eintritt und ein Austritt ($\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2$)
stationärer Fließprozeß

$$\dot{E}_{Q12} + P_{t12}^{st} + \dot{W}_{diss12} - \dot{E}_{v12} = \dot{m} \cdot \left[(e_2 - e_1) + \frac{1}{2} \cdot (c_2^2 - c_1^2) + g \cdot (z_2 - z_1) \right] \quad (10.14)$$

Exergetischer Wirkungsgrad:

$$\eta_{ex} = \frac{\sum \dot{E}_{\text{Nutzen}}}{\sum \dot{E}_{\text{Aufwand}}}$$

(10.15)

Sonderfall: Adiabate Mischung von Fluidströmen

$$-\dot{E}_{v12} = \dot{E}_2^{st} - \sum \dot{E}_1^{st}$$

(10.16)

Energieformen als reine Exergie

Spez. Nutzarbeit am Kolben bei geschlossenen Systemen:

$$e_N = w_N = w_{v12} + p_u \cdot (v_2 - v_1) \quad (10.17)$$

Spez. Technische Arbeit bei offenen Systemen: $e_t = w_t = \int_{p_1}^{p_2} v \cdot dp + w_{r12}$ (10.18)

Spez. Elektrische Arbeit: $e_{el} = w_{el}$ (10.19)

Spez. Wellenarbeit: $e_W = w_W$ (10.20)

Spez. kinetische Energie: $e_{kin} = \frac{1}{2} c^2$ (10.21)

Spez. potentielle Energie: $e_{pot} = g \cdot z$ (10.22)

Energieformen mit Exergie und Anergie

Spez. Exergie (der Enthalpie): $e = (h - h_u) - T_u \cdot (s - s_u)$ (10.23)

Spez. Exergie der inneren Energie: $e_{(u)} = (u - u_u) - T_u \cdot (s - s_u) + p_u \cdot (v - v_u)$ (10.24)

Spez. Exergie der Wärme: $e_q = \int_1^2 \frac{T - T_u}{T} \delta q$ (10.25)

Energieformen als reine Anergie

Spez. Enthalpie bei Umgebungszustand: $h = f(p_u, T_u) = h_u, e_u = 0$

Spez. Innere Energie bei Umgebungszustand: $u = f(p_u, T_u) = u_u, e_{(u)u} = 0$

Spez. übertragene Wärme bei $T = T_u$: $q_{12} = T_u \cdot (s_2 - s_1), e_q(T_u) = 0$

Spez. Volumenänderungsarbeit bei $p = p_u$: $w_{v12} = p_u \cdot (v_2 - v_1), e_{wv}(p_u) = 0$

Eindimensionale stationäre Wärmeleitung ohne Wärmequellen ($\lambda = \text{const}$)

Gleichung des Temperaturfeldes: $\text{divgrad } \vartheta = 0$ (12.1)

Wärmestromdichte: (Betrag) $\hat{q} = -\lambda \cdot \text{grad } \vartheta$ (12.2) $\hat{q} = \frac{\dot{Q}}{A}$ (12.3) λ - Wärmeleitkoeffizient
 ↗ Stoffwerte

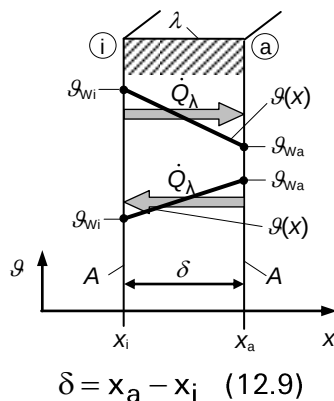
Wärmestrom durch Wand: $\dot{Q}_\lambda = \frac{\Delta \vartheta_\lambda}{R_\lambda}$ (12.4) $\Delta \vartheta_\lambda = |\vartheta_{wi} - \vartheta_{wa}|$ (12.5)

Wärmeleitwiderstand: $R_\lambda = \frac{\delta}{\lambda \cdot A_m}$ (12.6) δ - Wanddicke
 A_m - mittlere vom Wärmestrom durchdrungene Fläche

Mehrschichtige Wand $R_\lambda = \sum_j R_{\lambda_j}$ (12.7)

Ebene Wand:

$$\text{grad } \vartheta = \frac{d\vartheta}{dx} \quad (12.8)$$



Temperaturverlauf (linear)

$$\vartheta(x) = \vartheta_{wi} - (\vartheta_{wi} - \vartheta_{wa}) \cdot \frac{(x - x_i)}{\delta} \quad (12.10)$$

$$A_m^{\text{Eb}} = a \cdot b = A_i = A_a = A = \text{const} \quad (12.11)$$

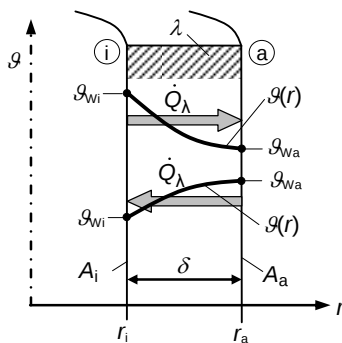
(a, b - Abmessungen der Wand)

→ Näherung für wandartige Gebilde

Zylinderwand:

(Rohr
Hohlzylinder)
mit Länge l

$$\text{grad } \vartheta = \frac{d\vartheta}{dr} \quad (12.12)$$



Temperaturverlauf (logarithmisch)

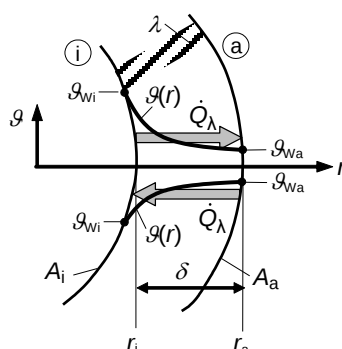
$$\vartheta(r) = \vartheta_{wi} - (\vartheta_{wi} - \vartheta_{wa}) \cdot \frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \quad (12.13)$$

$$A_m^{\text{Zyl}} = \pi \cdot l \cdot \frac{(d_a - d_i)}{\ln\left(\frac{d_a}{d_i}\right)} = \frac{A_a - A_i}{\ln\left(\frac{A_a}{A_i}\right)} \quad (12.14) \quad \text{logarithmisches Mittel}$$

$$\delta = r_a - r_i = \frac{1}{2}(d_a - d_i) \quad (12.15) \quad \rightarrow \text{Näherung für kanalartige Gebilde bei } \frac{A_a}{A_i} < 3$$

Kugelwand: (Hohlkugel)

$$\text{grad } \vartheta = \frac{d\vartheta}{dr} \quad (12.16)$$



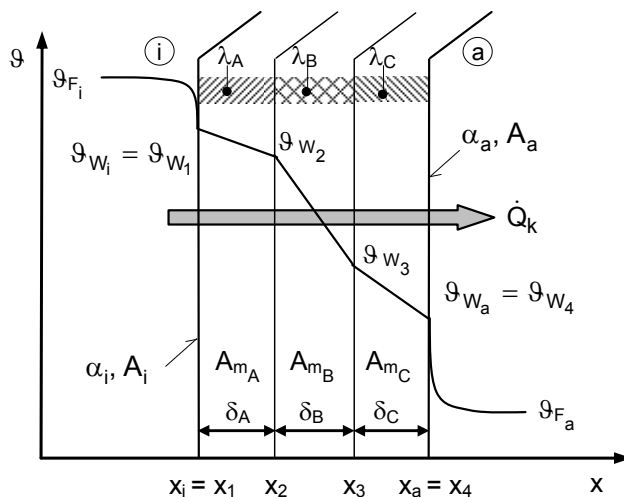
Temperaturverlauf (hyperbolisch)

$$\vartheta(r) = \vartheta_{wi} - (\vartheta_{wi} - \vartheta_{wa}) \cdot \frac{\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r}\right)}{\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}\right)} \quad (12.17)$$

$$A_m^{\text{Kug}} = \pi \frac{(d_a - d_i)}{\left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_a}\right)} = \sqrt{A_a \cdot A_i} \quad (12.18) \quad \text{geometrisches Mittel}$$

$$\delta = r_a - r_i = \frac{1}{2}(d_a - d_i) \quad (12.19) \quad \rightarrow \text{Näherung für geschlossene Gefäße bei } \frac{A_a}{A_i} < 3$$

Eindimensionaler stationärer Wärmedurchgang ($\lambda, \alpha = \text{const}$)



Sonderfall:

Ebene Wand

$$A_i = A_{m_j} = A_a = A = \text{const}$$

(j = A, B, C)

Wärmestrom:

$$\dot{Q}_k = \frac{\Delta \vartheta_k}{R_k} \quad (13.1) \quad \Delta \vartheta_k = |\vartheta_{F_i} - \vartheta_{F_a}| \quad (13.2)$$

Wärmedurchgangswiderstand

$$R_k = R_{\alpha_i} + \sum_j R_{\lambda_j} + R_{\alpha_a} \quad (j = A, B, C) \quad (13.3)$$

$$R_k = \frac{1}{k_a \cdot A_a} = \frac{1}{k_i \cdot A_i} \quad (13.4)$$

k_a - Wärmedurchgangskoeffizient
bezogen auf Fläche A_a

$$k_a = \frac{1}{R_k \cdot A_a} \quad (13.5)$$

k_i - Wärmedurchgangskoeffizient
bezogen auf Fläche A_i

$$k_i = \frac{1}{R_k \cdot A_i} \quad (13.6)$$

Wärmeübergangswiderstände

$$R_{\alpha_i} = \frac{1}{\alpha_i \cdot A_i} \quad R_{\alpha_a} = \frac{1}{\alpha_a \cdot A_a} \quad (13.7) \quad \alpha - \text{Wärmeübergangskoeffizient}$$

Wärmeleitwiderstand
der Schicht j (j = A, B, C)

$$R_{\lambda_j} = \frac{\delta_j}{\lambda_j \cdot A_{m_j}} \quad (13.8)$$

Kontinuitätsgleichung des stationären Wärmestroms:

$$\dot{Q}_k = \dot{Q}_{\alpha_i} = \dot{Q}_{\lambda_j} = \dot{Q}_{\alpha_a} = \dot{Q} \quad (13.9)$$

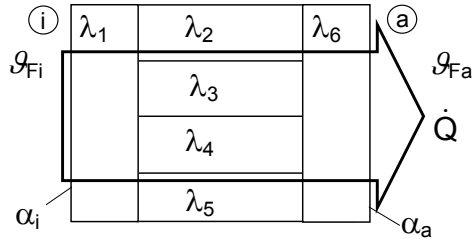
$$\dot{Q}_k = \frac{\Delta \vartheta_k}{R_k} \quad (13.10), \quad \dot{Q}_{\alpha_i} = \frac{\Delta \vartheta_{\alpha_i}}{R_{\alpha_i}} \quad (13.11), \quad \dot{Q}_{\lambda_j} = \frac{\Delta \vartheta_{\lambda_j}}{R_{\lambda_j}} \quad (13.12), \quad \dot{Q}_{\alpha_a} = \frac{\Delta \vartheta_{\alpha_a}}{R_{\alpha_a}} \quad (13.13)$$

Verallgemeinerung:

$$\dot{Q} = \frac{\Delta \vartheta}{R_{th}}$$

(13.14), R_{th} - thermischer Widerstand zwischen den Temperaturen von $\Delta \vartheta$

Berechnung des thermischen Widerstandes:

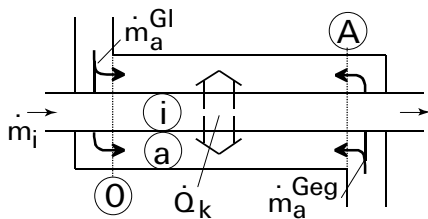


Näherung für Vernachlässigung der W-Ströme quer:

$$R_{th} = R_{\alpha_i} + R_{\lambda_1} + R_{\lambda_{2-5}} + R_{\lambda_6} + R_{\alpha_a} \quad (\text{Reihenschaltung}) \quad (13.15)$$

$$\frac{1}{R_{\lambda_{2-5}}} = \frac{1}{R_{\lambda_2}} + \frac{1}{R_{\lambda_3}} + \frac{1}{R_{\lambda_4}} + \frac{1}{R_{\lambda_5}} \quad (\text{Parallelschaltung}) \quad (13.16)$$

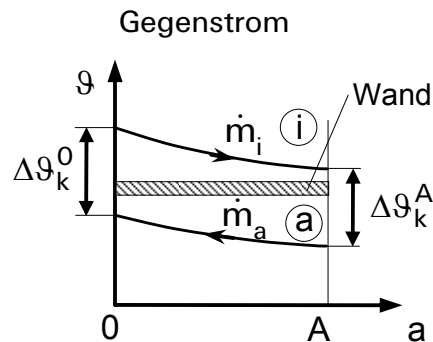
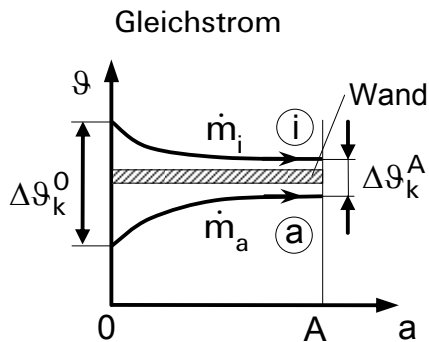
Wärmedurchgang bei aneinander vorbeifließenden Fluiden (durch Wand getrennt)



Gl - Fluide im Gleichstrom

Geg - Fluide im Gegenstrom

Temperaturschaubild



Mittlere Temperaturdifferenz zwischen $\dot{m}_i$ und $\dot{m}_a$ von ① bis ② :

$$\Delta \vartheta_k^m = \frac{\Delta \vartheta_k^0 - \Delta \vartheta_k^A}{\ln \frac{\Delta \vartheta_k^0}{\Delta \vartheta_k^A}} \quad (13.17)$$

$$\Delta \vartheta_k^0 = |\vartheta_{Fi} - \vartheta_{Fa}|_{\text{①}} \quad (13.18)$$

$$\Delta \vartheta_k^A = |\vartheta_{Fi} - \vartheta_{Fa}|_{\text{②}} \quad (13.19)$$

Hinweis:
Unterschied, ob
Gleich- oder
Gegenstrom

Wärmestrom

$$\dot{Q}_k = \frac{\Delta \vartheta_k^m}{R_k} \quad (13.20)$$

Konvektiver Wärmeübergang

Wärmestrom (NEWTONsches Wärmeübergangsgesetz)

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\Delta \vartheta_\alpha}{R_\alpha} \quad (14.1), \quad R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot A} \quad (14.2) \implies \boxed{\dot{Q}_\alpha = \alpha \cdot A \cdot \Delta \vartheta_\alpha} \quad (14.3)$$

$$\Delta \vartheta_\alpha = \frac{|\vartheta_{F1} - \vartheta_W| - |\vartheta_{F2} - \vartheta_W|}{\ln \frac{|\vartheta_{F1} - \vartheta_W|}{|\vartheta_{F2} - \vartheta_W|}} \quad (14.4) \quad \begin{array}{l} \vartheta_F \text{ ändert sich von } \vartheta_{F1} \text{ auf } \vartheta_{F2}, \\ \text{bei Mittelwert } \vartheta_W \end{array}$$

$$\Delta \vartheta_\alpha = |\vartheta_F^m - \vartheta_W| \quad (14.5) \quad \begin{array}{l} \text{bei Mittelwerten für Fluidtemperatur } \vartheta_F^m \\ \text{und Wandtemperatur } \vartheta_W \end{array}$$

Wärme-
übergangs-
koeffizient:

$$\boxed{\alpha = Nu \cdot \frac{\lambda}{l_{\text{char}}}} \quad (14.6)$$

λ bei $\vartheta_{\text{st}} \nearrow$ Stoffwerte

Nu - *Nu*ßelt-Zahl

l_{char} - charakteristische Länge
für jeweilige Geometrie

Reynolds-Zahl:

$$\boxed{Re = \frac{c \cdot l_{\text{char}}}{\nu}} \quad (14.7)$$

ν bei $\vartheta_{\text{st}} \nearrow$ Stoffwerte

Prandtl-Zahl:

$$\boxed{Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\eta \cdot c_p}{\lambda}} \quad (14.9)$$

η, c_p, λ bei $\vartheta_{\text{st}} \nearrow$ Stoffwerte

Grashof-Zahl:

$$\boxed{Gr = \frac{1}{\nu^2} (\beta \cdot g \cdot l_{\text{char}}^3 \cdot \Delta \vartheta_\alpha)} \quad (14.11)$$

ν bei $\vartheta_{\text{st}} \nearrow$ Stoffwerte

g - Fallbeschleunigung

Fluid

λ - Wärmeleitkoeffizient

η - dynamische Zähigkeit

ν - kinematische Viskosität $\boxed{\nu = \frac{\eta}{\rho}}$ (14.8)

ρ - Dichte $\rho = \frac{1}{\nu}$

a - Temperaturleitkoeff. $\boxed{a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}}$ (14.10)

c - Geschwindigkeit

β - isobarer Volumenausdehnungskoeffizient $\boxed{\beta = \alpha_v = \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{\partial \nu}{\partial T} \right)_p}$ (14.12)

β bei $\left\{ \begin{array}{l} \vartheta_F^m \nearrow \text{Stoffwerte} \\ \beta = \frac{1}{T_F^m} \text{ für ideale Gase} \end{array} \right. \quad (14.13)$

Stoffwerte bei Stoffwert-Temperatur: ϑ_{st} (Ausnahme ϑ_F^m für β)

Korrekturfaktor für Temperatur-Abhängigkeit der Stoffwerte – falls in Nu-Glg. angegeben

Gase: $K_T = 1$ (14.14)

η – Dyn. Zähigkeit des Fluids bei Stoffwerttemp. ϑ_{st}

Flüssigkeiten: $K_T = \left(\frac{\eta}{\eta_W} \right)^{0,14}$ (14.15)

η_W – Dyn. Zähigkeit des Fluids bei mittlerer
Wandtemperatur ϑ_W

Freie Konvektion $\Rightarrow Nu = f(Gr, Pr)$

a) Platten, Zylinder, Kugeln $\dot{Q}_\alpha = \alpha \cdot A \cdot |\vartheta_F - \vartheta_W|$ (14.16)

$$Nu = \left[0,11 \cdot (Gr \cdot Pr)^{\frac{1}{3}} + (Gr \cdot Pr)^{0,1} \right] \cdot K_T \quad (14.17) \quad \vartheta_{st} = \frac{1}{2}(\vartheta_F + \vartheta_W) \quad (14.18)$$

gültig für $Pr > 0,5$, $10^{-7} \leq (Gr \cdot Pr) \leq 10^{12}$

l_{char} = Höhe bei senkrechten Wänden und Rohren

l_{char} = Außendurchmesser bei waagerechten Rohren und Kugeln

l_{char} = kleinere Seitenlänge bei waagerechter Platte

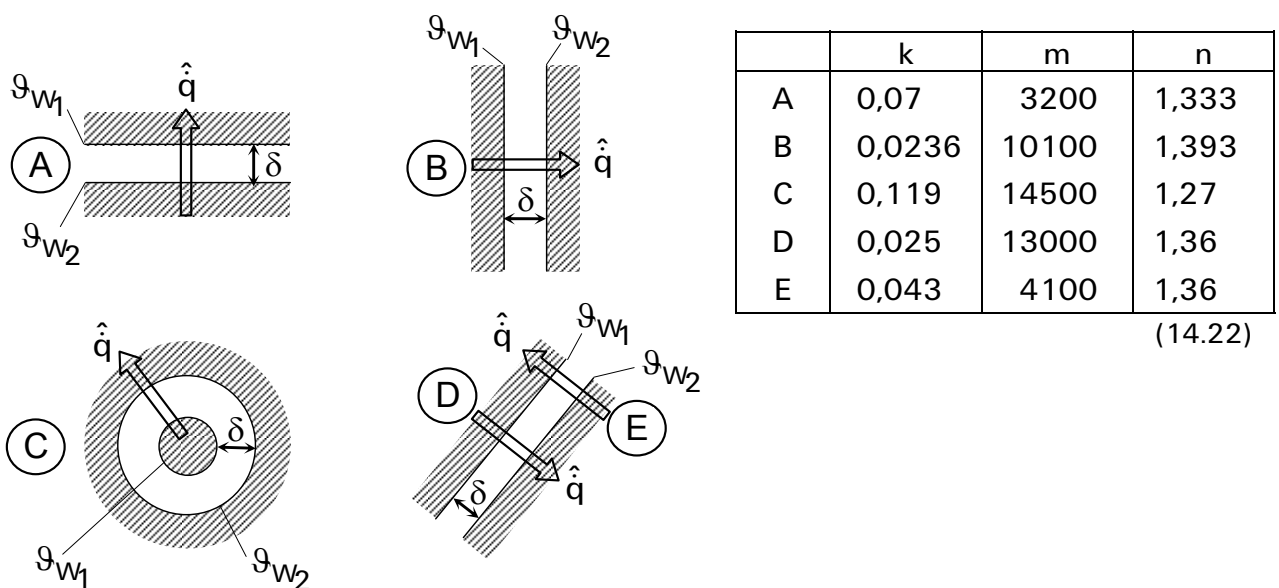
b) Enge Spalte $\dot{Q}_\alpha = \alpha \cdot A \cdot |\vartheta_{W_2} - \vartheta_{W_1}|$ (14.19)

$$Nu = 1 + \frac{k \cdot (Gr \cdot Pr)^n}{m + (Gr \cdot Pr)} \quad \vartheta_{st} = \frac{1}{2}(\vartheta_{W_1} + \vartheta_{W_2}) \quad \vartheta_{W_1}, \vartheta_{W_2} \text{ - Temperaturen der Spaltoberflächen}$$

(14.20) (14.21)

gültig für $Pr > 0,5$, $1700 \leq (Gr \cdot Pr) \leq 10^8$

$Nu = 1$ für $(Gr \cdot Pr) < 1700$



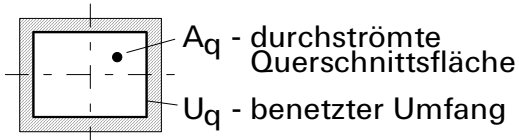
$l_{char} = \delta$ (Spaltbreite)

Erzwungene Konvektion $\Rightarrow Nu = f(Re, Pr)$

a) Strömung durch Rohre $\dot{Q}_\alpha = \alpha \cdot A \cdot \frac{|\vartheta_{F1} - \vartheta_W| - |\vartheta_{F2} - \vartheta_W|}{\ln \frac{|\vartheta_{F1} - \vartheta_W|}{|\vartheta_{F2} - \vartheta_W|}}$ **bzw.** $\dot{Q}_\alpha = \alpha \cdot A \cdot |\vartheta_F^m - \vartheta_W|$ (14.24)

(14.23)

$$l_{char} = d_{gl} \quad d_{gl} = \frac{4A_q}{U_q} \quad (14.25)$$



Sonderfall: Kreisrohr $d_{gl} = d_i$

ϑ_F^m - mittlere Fluidtemperatur
 ϑ_W - mittlere Wandtemperatur
 ϑ_{F1} - Eintrittstemperatur Fluid
 ϑ_{F2} - Austrittstemperatur Fluid
 L - Rohrlänge

Laminare Strömung bei $Re < 2300$

$$Nu = \left[3,66 + \frac{0,0677 \cdot \left(Re \cdot Pr \cdot \frac{d_{gl}}{L} \right)^{1,33}}{1 + 0,1 \cdot Pr \cdot \left(Re \cdot \frac{d_{gl}}{L} \right)^{0,83}} \right] \cdot K_T \quad (14.26)$$

$\vartheta_{st} = \frac{1}{2}(\vartheta_{F1} + \vartheta_{F2})$ (14.27)
 bzw. $\vartheta_{st} = \vartheta_F^m$ (Mittelwert)

gültig für: $\left(Re \cdot Pr \cdot \frac{d_{gl}}{L} \right) > \frac{2}{3}, Pr > 0,6$

Turbulente Strömung bei $Re \geq 2300$

$$Nu = \left\{ 0,0235 \left(Re^{0,8} - 230 \right) \cdot \left[1 + \left(\frac{d_{gl}}{L} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \cdot \left(1,8 \cdot Pr^{0,3} - 0,8 \right) \right\} \cdot K_T \quad (14.28)$$

$\vartheta_{st} = \frac{1}{2}(\vartheta_{F1} + \vartheta_{F2})$ (14.29)
 bzw. $\vartheta_{st} = \vartheta_F^m$ (Mittelwert)

gültig für: $\left(\frac{L}{d_{gl}} \right) > 1, 2300 \leq Re < 10^6, 0,6 < Pr < 10^3$

b) Strömung entlang ebener Wände (Platten) $\dot{Q}_\alpha = \alpha \cdot A \cdot |\vartheta_{F1} - \vartheta_W|$ (14.30)

l_{char} - Länge der Wand (Platte) in Strömungsrichtung

ϑ_{F1} - Anströmtemperatur des Fluids, ϑ_W - mittlere Wandtemperatur

Laminare Grenzschicht bei $Re < 3,5 \cdot 10^5$

$$Nu = 0,664 \cdot Re^{\frac{1}{2}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \cdot K_T \quad (14.31) \quad \vartheta_{st} = \frac{1}{2}(\vartheta_{F1} + \vartheta_W) \quad (14.32)$$

gültig für: $Pr > 0,6$

Turbulente Grenzschicht bei $Re \geq 3,5 \cdot 10^5$

$$Nu = 0,037 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,43} \cdot K_T \quad (14.33) \quad \vartheta_{st} = \vartheta_{F1} \quad (14.34)$$

gültig für: $0,6 \leq Pr \leq 100$

VDI-WÄRMEATLAS

Herausgeber:

Verein Deutscher Ingenieure
VDI-Gesellschaft Verfahrenstechnik
und Chemieingenieurwesen (GVC)

Zehnte, bearbeitete und erweiterte Auflage



Springer

Definition des Wärmeübergangskoeffizienten

Der mittlere Wärmeübergangskoeffizient α an einer einzelnen Rohrreihe und in einem Rohrbündel ist definiert durch

$$\dot{q} = \alpha \Delta \vartheta_{\text{ln}}$$

Es gilt für die logarithmische Temperaturdifferenz

$$\Delta \vartheta_{\text{ln}} = \frac{(\vartheta_{\text{W}} - \vartheta_{\text{E}}) - (\vartheta_{\text{W}} - \vartheta_{\text{A}})}{\ln \frac{\vartheta_{\text{W}} - \vartheta_{\text{E}}}{\vartheta_{\text{W}} - \vartheta_{\text{A}}}}$$

mit der Eintrittstemperatur ϑ_{E} und der Austrittstemperatur ϑ_{A} des Strömungsmediums sowie der Rohrwandtemperatur ϑ_{W} .

Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten an einer einzelnen Rohrreihe

Die mittlere Nußelt-Zahl einer querangeströmten einzelnen Glattrohrreihe ist gleich der mittleren Nußelt-Zahl eines querangeströmten Einzelrohres, wenn man die Nußelt-Zahl des Einzelrohres nach Gl. (1) in Abschn. Gf mit einer Reynolds-Zahl berechnet, in die als charakteristische Geschwindigkeit des Strömungsmediums die mittlere Geschwindigkeit im Hohlraumanteil der Rohrreihe auf der Länge des Rohrdurchmessers eingesetzt wird [1]. Der Hohlraumanteil ist vom Querteilungsverhältnis $a = s_1/d_a$ der Rohrreihe abhängig. Bild 1 erläutert die Bestimmung von a . Für den Hohlraumanteil gilt

$$\psi = 1 - \frac{\pi}{4a} \quad (1)$$

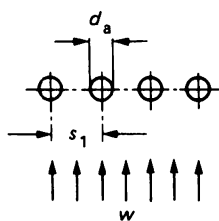


Bild 1.
Querteilung bei einer Rohrreihe

Für $Nu_{0,\text{Reihe}}$ gilt dann nach Abschn. Gf

$$Nu_{0,\text{Reihe}} = 0,3 + \sqrt{Nu_{l,\text{lam}}^2 + Nu_{l,\text{turb}}^2} \quad (2)$$

mit

$$Nu_{l,\text{lam}} = 0,664 \sqrt{Re_{\psi,l}} \sqrt[3]{Pr} \quad (3)$$

und

$$Nu_{l,\text{turb}} = \frac{0,037 Re_{\psi,l}^{0,8} Pr}{1 + 2,443 Re_{\psi,l}^{-0,1} (Pr^{2/3} - 1)} \quad (4)$$

Darin sind

$$Nu_{l,\text{Reihe}} = \frac{\alpha l}{\lambda}, \quad (5)$$

$$Re_{\psi,l} = \frac{w l}{\psi \nu}; \quad 10 < Re_{\psi,l} < 10^6, \quad (6)$$

$$Pr = \frac{\nu}{a}; \quad 0,6 < Pr < 10^3. \quad (7)$$

$l = \frac{\pi}{2} d_a$ ist die Überströmlänge des Einzelrohres und w die Geschwindigkeit des Strömungsmediums im freien Querschnitt vor der Rohrreihe. Die Stoffwerte sind für die mittlere Temperatur des Strömungsmediums $\vartheta_m = (\vartheta_{\text{E}} + \vartheta_{\text{A}})/2$ einzusetzen. In Pr a die Temperaturleitfähigkeit des Strömungsmediums.

$Nu_{0,\text{Reihe}}$ kann aus Bild 3 bis 5 in Abschn. Gf entnommen werden, wenn man dort $Re_{\psi,l}$ an Stelle von Re_l einsetzt.

Bei geringem Turbulenzgrad des anströmenden Mediums, also z. B. bei starker Beschleunigung im Kanaleintritt oder bei Vorschaltung von Beruhigungseinrichtungen, können im Bereich $10^4 < Re_{\psi,l} < 10^6$ Abweichungen in der Nußelt-Zahl bis zu -40% auftreten, wie sie auch beim querangeströmten Einzelrohr beobachtet wurden [2].

Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten in einem Rohrbündel

Die mittlere Nußelt-Zahl eines querangeströmten Glattrohrbündels kann aus der mittleren Nußelt-Zahl eines querangeströmten Einzelrohres berechnet werden [1]. Die Nußelt-Zahl eines Rohres in einem Rohrbündel ist jedoch bei gleicher Überströmgeschwindigkeit – abhängig von der Längs- und Querteilung des Rohrbündels – höher als die eines frei angeströmten Einzelrohres. Berechnet man die Nußelt-Zahl des Einzelrohres nach Gl. (1) in Abschn. Gf mit einer Reynolds-Zahl, in die – wie bei der einzelnen Rohrreihe – als charakteristische Geschwindigkeit des Strömungsmediums die mittlere Geschwindigkeit im Hohlraumanteil einer Rohrreihe auf der Länge eines Rohrdurchmessers eingesetzt wird, so gilt nach [1]

$$Nu_{0,\text{Bündel}} = f_A Nu_{l,0}. \quad (8)$$

Der Hohlraumanteil ψ und der Anordnungsfaktor f_A sind vom Querteilungsverhältnis $a = s_1/d_a$ und vom Längsteilungsverhältnis $b = s_2/d_a$ des Rohrbündels abhängig.

Bild 2 erläutert die Bestimmung von a und b für verschiedenartige Rohranordnungen. Für den Hohlraumanteil gilt

$$\psi = 1 - \frac{\pi}{4a} \quad \text{für } b \geq 1, \quad (9)$$

$$\psi = 1 - \frac{\pi}{4ab} \quad \text{für } b < 1. \quad (10)$$

*) Bearbeiter des Abschnitts Gg: Prof. Dr.-Ing. V. Gnielinski, Karlsruhe

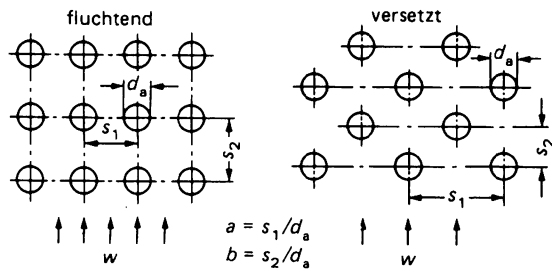


Bild 2. Quer- und Längsteilung bei Rohrbündeln

Für $Nu_{l,0}$ gilt nach Abschn. Gf, Gl. (1),

$$Nu_{l,0} = 0,3 + \sqrt{Nu_{l,lam}^2 + Nu_{l,turb}^2} \quad (11)$$

mit

$$Nu_{l,lam} = 0,664 \sqrt{Re_{\psi,l}} \sqrt[3]{Pr} \quad (12)$$

und

$$Nu_{l,turb} = \frac{0,037 Re_{\psi,l}^{0,8} Pr}{1 + 2,443 Re_{\psi,l}^{-0,1} (Pr^{2/3} - 1)} \quad (13)$$

Darin sind

$$Nu_{0,Bündel} = \frac{\alpha l}{\lambda}, \quad (14)$$

$$Re_{\psi,l} = \frac{w l}{\psi \nu} \quad 10 < Re_{\psi,l} < 10^6, \quad (15)$$

$$Pr = \frac{\nu}{a} \quad 0,6 < Pr < 10^3. \quad (16)$$

$l = \frac{\pi}{2} d_a$ ist die Überströmlänge des Einzelrohres und w die Geschwindigkeit des Strömungsmediums im freien Querschnitt vor dem Rohrbündel. Die Stoffwerte sind für die mittlere Temperatur des Strömungsmediums $\vartheta_m = (\vartheta_E + \vartheta_A)/2$ einzusetzen. In Pr ist a die Temperaturleitfähigkeit des Strömungsmediums.

$Nu_{l,0}$ kann aus Bild 3 bis 5 in Abschn. Gf entnommen werden, wenn man dort $Re_{\psi,l}$ an Stelle von Re_l einsetzt.

Für den Rohranordnungsfaktor gilt bei *fluchtender* Rohranordnung

$$f_{A,n} = 1 + \frac{0,7}{\psi^{1,5}} \frac{(b/a - 0,3)}{(b/a + 0,7)^2} \quad (17)$$

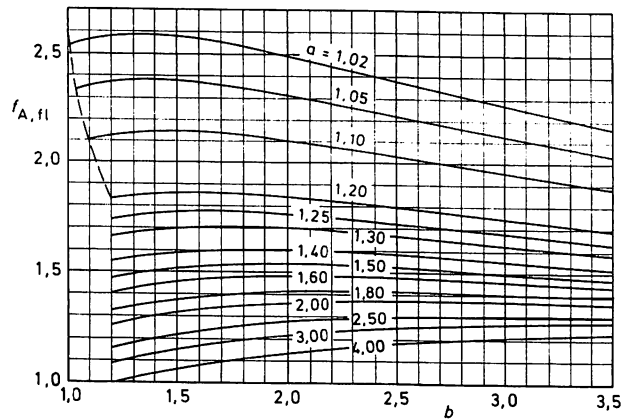
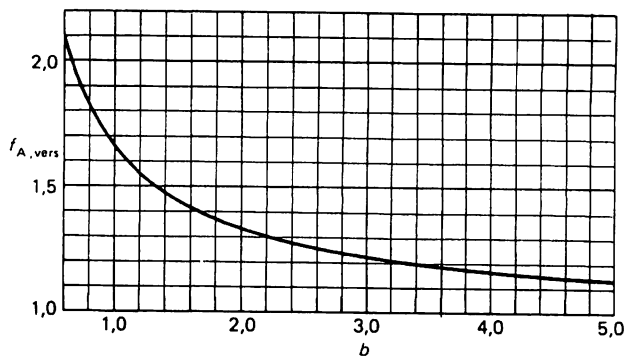
mit ψ nach Gl. (9).

Gleichung (17) ist aus experimentell ermittelten Werten erarbeitet worden, für die galt $b \geq 1,2$; für $b < 1,2$ war $(b/a) \geq 1$. Fluchtende Rohrbündel mit Längsteilungen $b < 1,2$ und $(b/a) < 1$ verhalten sich nach den vorliegenden experimentellen Werten [2] für $Re_{\psi,l} < 10^4$ eher wie durchströmte Kanäle, die durch die eng hintereinanderliegenden Rohrreihen gebildet werden. Die Erhöhung der Wärmeübergangskoeffizienten, die durch die Turbulenzsteigerung infolge der Rohrreihen hervorgerufen wird und in Gl. (17) ihren Ausdruck findet, erfolgt dabei nicht oder nur in geringem Maß. Bessere Angaben sind wegen des Mangels an experimentellen Unterlagen nicht möglich.

Bei versetzter Rohranordnung gilt

$$f_{A,vers} = 1 + \frac{2}{3b}. \quad (18)$$

In Abhängigkeit vom Querteilungsverhältnis a und vom Längsteilungsverhältnis b ist $f_{A,n}$ in Bild 3, in Abhängigkeit vom Längsteilungsverhältnis b ist $f_{A,vers}$ in Bild 4 dargestellt.

Bild 3. Rohranordnungsfaktor $f_{A,n}$ in Abhängigkeit vom Quer- und LängsteilungsverhältnisBild 4. Rohranordnungsfaktor $f_{A,vers}$ in Abhängigkeit vom Längsteilungsverhältnis

Teilversetzte Rohrbündel

Die Teilungsverhältnisse a , b und c eines teilversetzten Rohrbündels sind in Bild 5 erläutert. Die mittleren Nuelt-Zahlen von Rohrbündeln mit teilversetzter Anordnung lassen sich ebenfalls nach Gl. (8) berechnen, wenn Rohrbündel mit Teilversetzungsverhältnissen $c < a/4$ wie fluchtende und solche mit $c \geq a/4$ wie

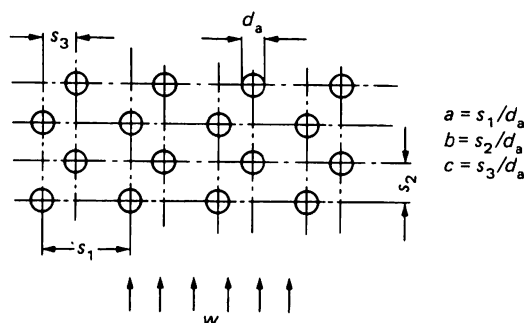


Bild 5. Teilungsverhältnisse bei teilversetzten Rohrbündeln

Wärmestrahlung

Strahlungskoeffizient
des Grauen Strahlers: $C = \varepsilon \cdot C_s$ (15.1)

Emissionsverhältnis ε $\nearrow$ Stoffwerte

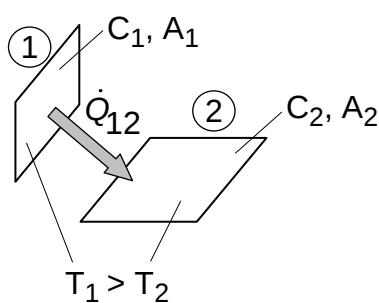
Strahlungskoeffizient des
Schwarzen Strahlers $C_s = 5,67051 \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$ (15.2)

Emittierter Energiestrom des grauen Strahlers: $\dot{E} = C \cdot A \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4$ (15.3)

Wärmestrom durch Strahlung zwischen zwei Grauen Strahlern ① und ②

$$\dot{Q}_{12} = C_{12} \cdot A_1 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] \quad \text{gilt für } T_1 > T_2 \quad (15.4)$$

Resultierender Strahlungskoeffizient



Für $T_1 > T_2$ gilt:

$$C_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varphi_{12} \cdot C_s} - \frac{1}{C_s} + \frac{1}{C_1} + \frac{A_1}{A_2} \cdot \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_s}\right)} \quad (15.5)$$

$$C_1 = \varepsilon_1 \cdot C_s \quad (15.6)$$

$$C_2 = \varepsilon_2 \cdot C_s \quad (15.7)$$

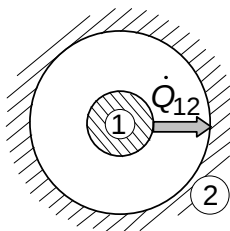
φ_{12} – Einstrahlzahl

$\nearrow$ Diagramme für bestimmte Geometrien

Reziprozitätsbeziehung für $T_2 > T_1$: $\varphi_{21} = \varphi_{12} \cdot \frac{A_1}{A_2}$ (15.8)

Sonderfälle:

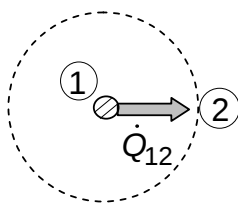
a) Sich umhüllende Körper ($\varphi_{12} = 1$)



$$C_{12} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{A_1}{A_2} \cdot \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_s}\right)} \quad (15.9) \quad \text{gilt für ① innerer Körper und für } T_1 > T_2$$

Anwendung möglich, falls innerer Körper ① nahezu durch Körper ② umhüllt

b) Unendlich großer Raum ② ($\varphi_{12} = 1$)

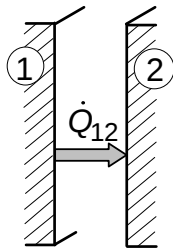


bei: $A_2 \gg A_1 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = 0$ (15.10)

$C_{12} = C_1$ gilt für $T_1 > T_2$

Anwendung möglich, falls umhüllender Körper ② viel größer als innerer Körper ①

c) ① und ② unendlich große parallele Wände ($\varphi_{12} = \varphi_{21} = 1$)

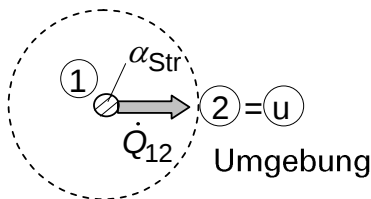


bei: $A_2 \approx A_1 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = 1$ (15.11)

$C_{12} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_s}} = C_{21}$ für $T_1 > T_2$ und $T_2 > T_1$ (15.12)

Anwendung möglich, falls Abstand viel kleiner als Abmessungen der Wände

Wärmeübergangskoeffizient durch Strahlung

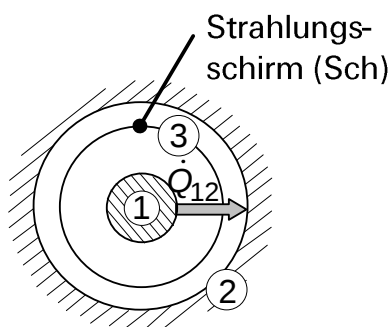


$$\alpha_{\text{Str}} = C_{12} \cdot \left[\frac{\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4}{(T_1 - T_2)} \right] \quad (15.13)$$

Falls Umgebung viel größer als Körper ① gilt

$C_{12} = C_1 = \varepsilon_1 \cdot C_s$ (15.14)

Strahlungsschirm



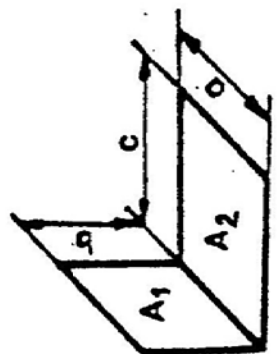
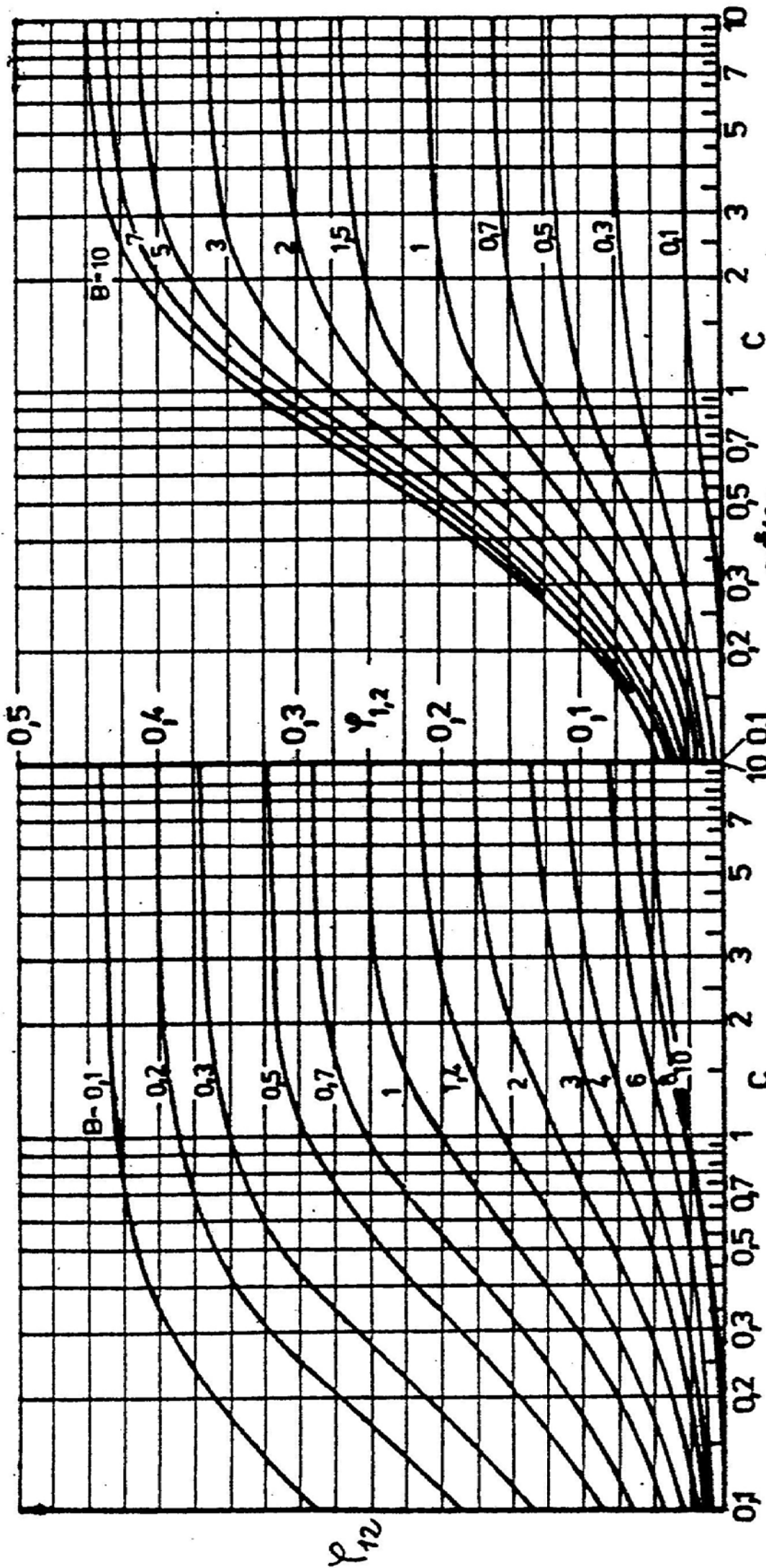
Stationärer Wärmestrom mit Strahlungsschirm

$\dot{Q}_{12}^{\text{Sch}} = \dot{Q}_{13} = \dot{Q}_{32}$ (15.15)

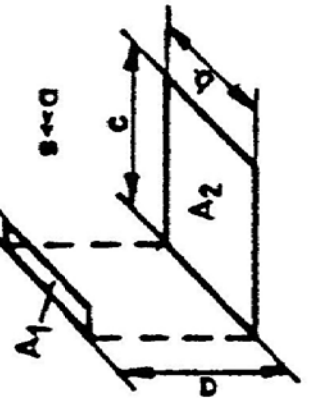
$$\dot{Q}_{12}^{\text{Sch}} = \frac{1}{\frac{1}{A_1 \cdot C_{13}} + \frac{1}{A_3 \cdot C_{32}}} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] \quad (15.16)$$

Temperatur des Strahlungsschirmes (auf beiden Seiten gleich)

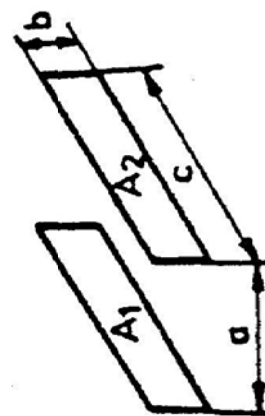
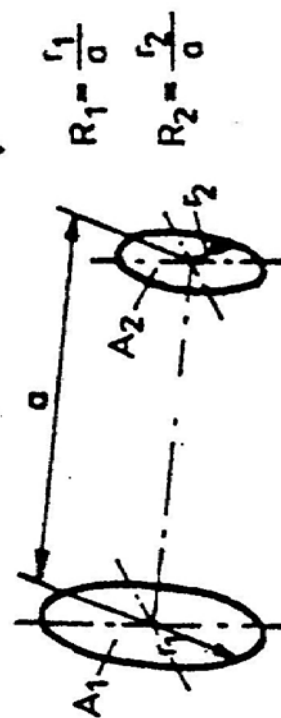
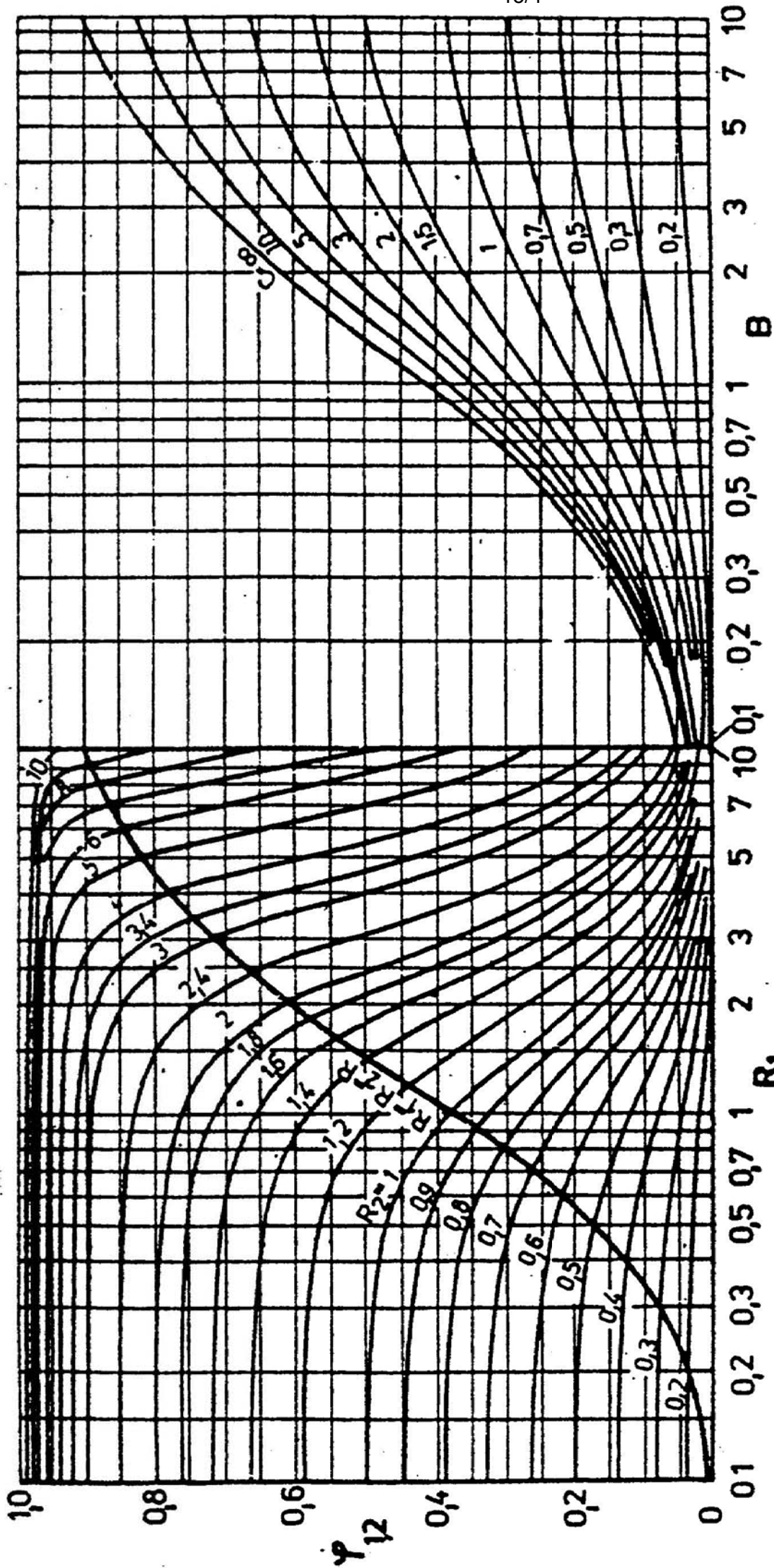
$$\left(\frac{T_3}{100}\right)^4 = \frac{C_{13} \cdot A_1 \cdot \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 + C_{32} \cdot A_3 \cdot \left(\frac{T_2}{100}\right)^4}{C_{13} \cdot A_1 + C_{32} \cdot A_3} \quad (15.17)$$



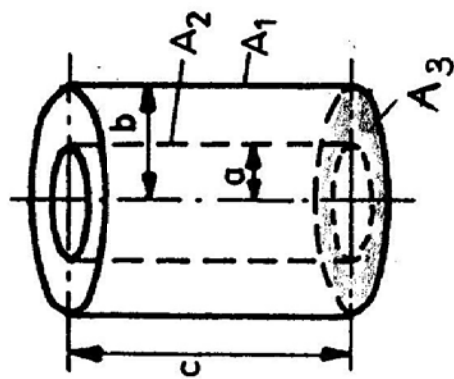
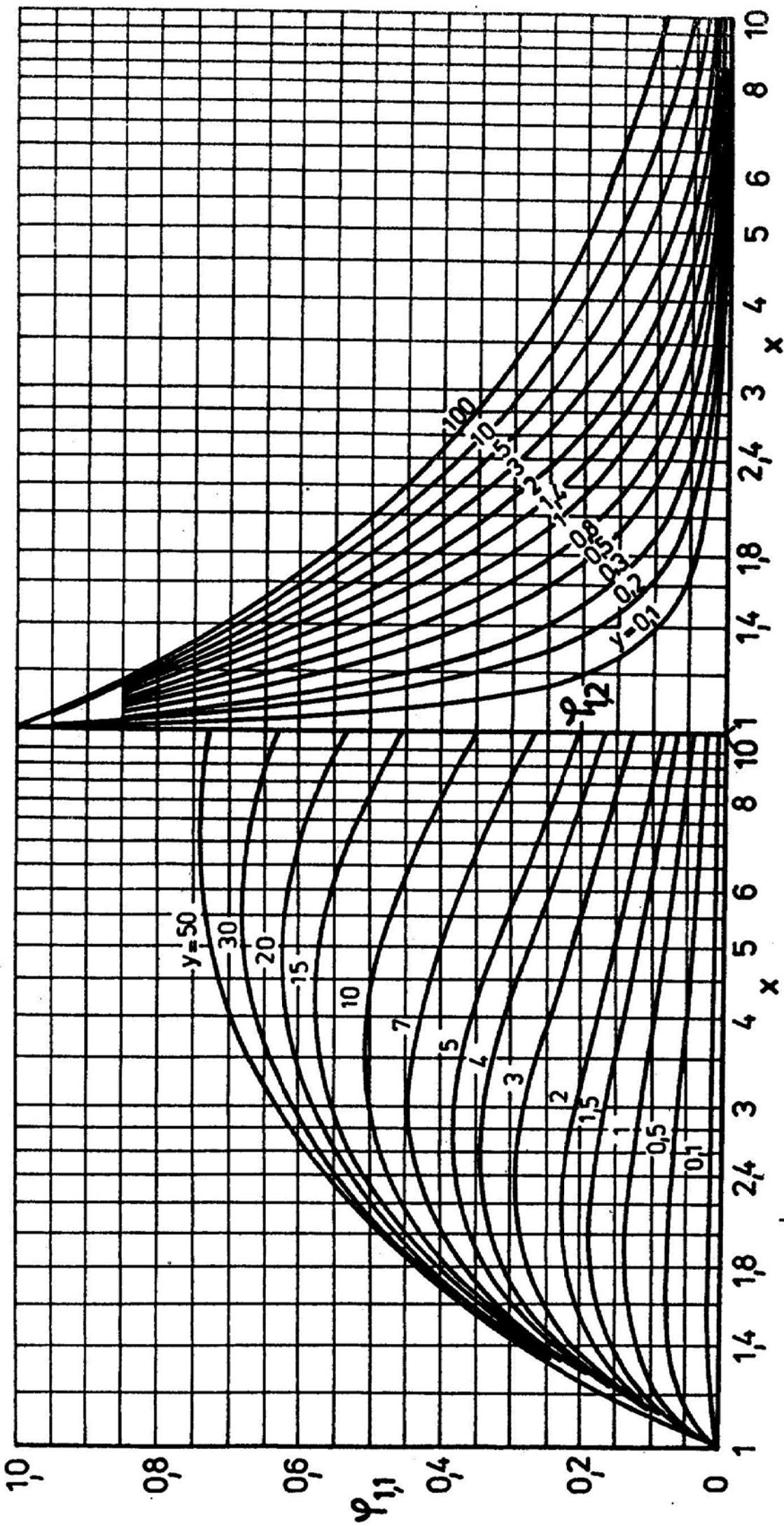
$$B = \frac{b}{a}; C = \frac{c}{a}$$



$$B = \frac{b}{a}; C = \frac{c}{a}$$



$B = \frac{b}{a}$
 $C = \frac{c}{a}$
 $A_1 = A_2$



$$x = \frac{b}{a} ; y = \frac{c}{a}$$

$$\varphi_{13} = \frac{1}{2} \cdot (1 - \varphi_{12} - \varphi_{11})$$