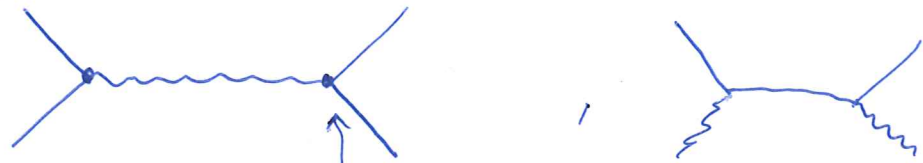


T 4. Übersicht und Ausblicke

Bisherige Theorie:

Streuung \rightarrow Feynman diagramme wie



äußere Teilchen, virtuelle Teilchen

Vertex

Wellenfunktionen
 wie $u(p,s)$ etc
 (hängen von Spin ab)

$\sim \frac{i}{p^2 - M^2}$
 durch freie
 Lagrangedichte
 beschrieben,
 entspricht dem
 WW-Potential

z.B. $(-ieQ \gamma^\mu)^{QED}$
 aus $\mathcal{L}_{int} = \bar{\psi} (-eQ \gamma^\mu) \psi A_\mu$



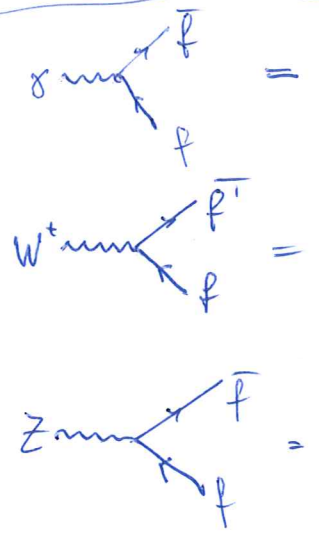
Vorhersagen hängen ab von

- Massen des virt. Teilchen (\rightarrow Resonanz peaks !)
- Spins, Polarisationen des äußeren Teilchen/virt. Teilchen
- Struktur der WW, z.B. $\sim \gamma^\mu$ oder $\gamma^\mu \gamma_5$ oder $\gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu$

alles kompakt formuliert durch $\mathcal{L}_{ext} + \mathcal{L}_{int}$

Vergleich mit Exp. liefert:

- alle Teilchen des SM gefunden (6 Quarks, 6 Leptonen, $\gamma, W, Z, Gluon, H$)
- Massen gemessen
- WWen insbes. kompatibel mit:



γ vertex: $\bar{f} \quad f = -ie Q_f \gamma^\mu$
 W^\pm vertex: $\bar{f} \quad f = -i \frac{g_W}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_L$, $g_W = \frac{e}{\sin \theta_W}$
 Z vertex: $\bar{f} \quad f = -i g_Z \gamma^\mu \left(\frac{C_V}{2} - \frac{C_A}{2} \gamma_5 \right)$, $g_Z = \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W}$

$C_V = T_{fL}^3 - 2Q_f \sin^2 \theta_W$
 $C_A = T_{fL}^3$

(→ Winkelverteilungen in schwachen Zerfällen)
 (→ Asymmetrien in $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow f\bar{f}$)

~~Unvollständigkeit gilt das ungefähr!~~

- ⇒ Bruchstücke von \mathcal{L}^{SM} bekannt

Aufgabe:

finde mathem. konsistente, in sich geschlossene Theorie ($\rightarrow \mathcal{L}^{SM}$), die alles obige konkret beschreibt!

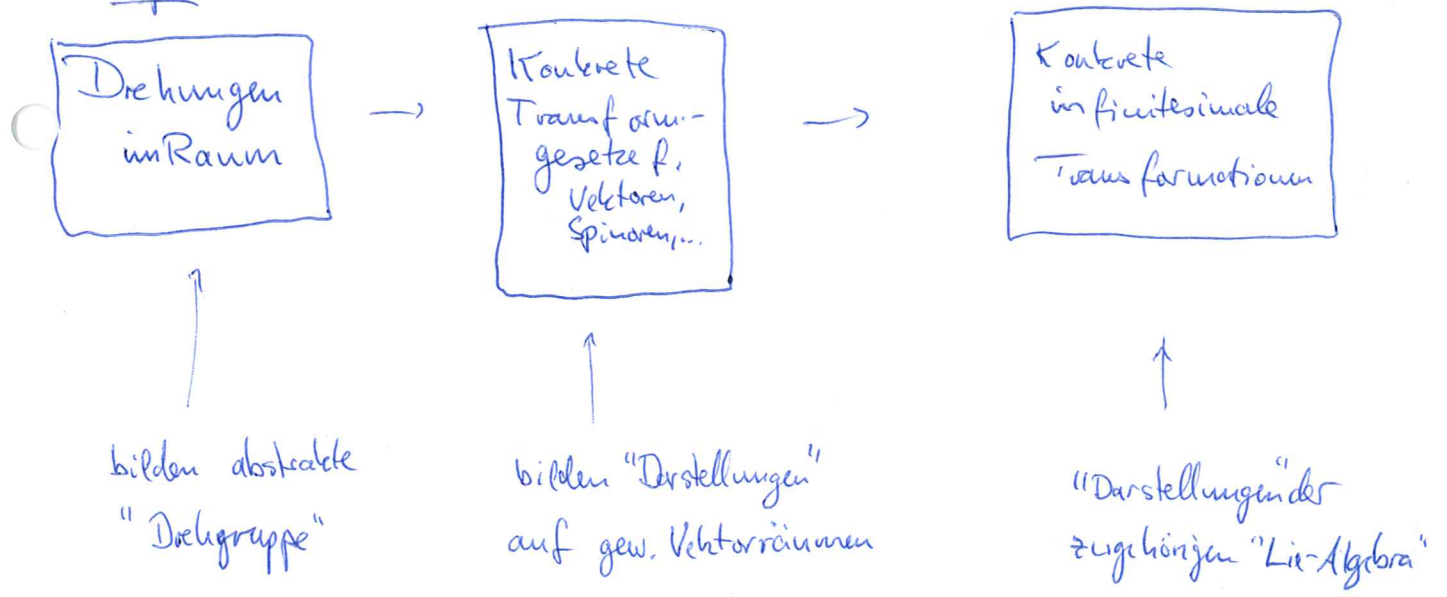
lokale Eichtheorie (Yang-Mills)	+	Higgs Mechanismus	+	chirale Fermionen
↑		↑		
nötig für Spin 1- konsistente WW		nötig f. Spin 1-Massen sowie hier f. Quark/Lept. Massen		

T 5. Allgemeine Yang-Mills Theorien (klassisch)

- nötige Gruppentheorie, allg. Prinzip, Bsp. QED, QCD
- noch kein Higgs Mechanismus

T 5.1 Liegruppen und Darstellungen

Bsp.



Beispiele:

Drehung um z-Achse

f. Vektor:

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_{3 \times 3} - i\theta \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f. Spinor

$$D_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2} & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_{2 \times 2} - i\theta \frac{\sigma_z}{2}$$

- jede Darstellung von Drehungen erfüllt selbe Vertauschungsrelationen

- f. infin. Transf. : $D_{\mathbb{R}}(\theta_x \mathbb{J}_x + \theta_y \mathbb{J}_y + \theta_z \mathbb{J}_z) = \mathbb{1} - i(\theta_x \mathbb{J}_x + \theta_y \mathbb{J}_y + \theta_z \mathbb{J}_z)$

mit $\boxed{[\mathbb{J}_x, \mathbb{J}_y] = i\mathbb{J}_z \text{ u. zyklisch}}$

Allg. Lie Gruppe:

abstrakte Gruppe, deren Elemente $g = g(\varrho_1, \dots, \varrho_N)$
von N kontinuierl., reellen Param. abhängen
 $g(\varrho_a = 0) = \mathbb{1}$ = neutrales Element

Darstellung:

f. jedes Element g \longleftrightarrow Matrix/Operator $D(g)$ bzw $D(\varrho_1, \dots, \varrho_N)$

mit:

$$D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2)$$

in fin. Darstellung:

$$D(\varrho_a) \cong \underbrace{D(\mathbb{1})}_{=\mathbb{1}} - i \sum_{\alpha=1}^N \varrho_a t^\alpha$$

"Generatoren, spezifisch für Darstellung"

Vertauschungsrelation/
"Lie-Algebra"

$$[t^a, t^b] = i f_{abc} t^c \quad (*)$$

"Strukturkonstanten", in jeder Darstellung
gleich \rightsquigarrow charakteristisch für Gruppe

Jeder Satz von Matrizen t^a , der (*) erfüllt, bildet eine Darstellung der Lie-Algebra und damit einer der Liegruppe

Beispiel Drehungen:

abstrakte Gruppe = $SO(3) = \{ \text{orthogonale Matrizen, det } R = 1 \}$
3-parametrische Liegruppe

Vektor-/definierende Darstellung: $g \mapsto g = \text{Matrix}$

$$t^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (t^3)_{ij} = -i \epsilon_{3ij}$$

Spinor-Darstellung:

$$t^3 = \frac{\sigma^3}{2}$$

triviale Darstellung:

$$t^3 = 0$$

Wichtige allg. Aussage:

"adjungierte Darstellung": zu jeder Liegruppe lassen sich Matrizen $(t^a)_{ij} := -i f_{aij}$ definieren.

\Rightarrow diese bilden immer eine Darstellung. Bei Drehungen: $\hat{=}$ Vektordarstellung.

5.2 Liegruppen SU(3), SU(2), U(1)

$$U(1) = \{ \text{Zahlen } e^{-i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} \}$$

1-parametrische Liegruppe

einige Darstellungen:

$$D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2) \text{ heißt wie: } D(\alpha_1 + \alpha_2) = D(\alpha_1) D(\alpha_2)$$

$$g(\alpha) = e^{-i\alpha} \longmapsto D(\alpha) := 1$$

$$D(\alpha) := e^{-i\alpha}$$

$$D(\alpha) := e^{-iQ\alpha}, \quad Q = \text{reelle Zahl}$$

$$D(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{-i\alpha} & \\ & & e^{-iQ\alpha} \end{pmatrix}$$

"reduzible Darstellung" \leadsto Blockmatrix

Generatoren jeweils:

$$t = 0$$

$$t = 1$$

$$t = Q$$

$$t = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & Q \end{pmatrix}$$

nur ein Generator \leadsto

$$[t, t] = 0, \text{ alles}$$

kommutiert

"abelsche Gruppe"

$$SU(N) = \left\{ U = N \times N\text{-Matrix} : U^\dagger U = \mathbb{1}, \det U = 1 \right\}$$

definierende / "fundamentale" Darstellung : $g \mapsto g$ (\equiv Matrix)

infinitesimal Ansatz: $g = \mathbb{1} - i \sum_a \theta_a t^a + \mathcal{O}(\theta^2)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{es muß gelten } \mathbb{1} &= g^\dagger g = (1 + i \sum_a \theta_a t^{a\dagger})(1 - i \sum_b \theta_b t^b) \\ &= 1 + i \sum_a \theta_a (t^{a\dagger} - t^a) + \mathcal{O}(\theta^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t^a = t^{a\dagger}$$

und $1 = \det(1 - i \sum_a \theta_a t^a) = \text{Produkt der Diag.-elemente} + \mathcal{O}(\theta^2)$

$$= 1 - i \sum_a \theta_a \text{Tr}(t^a) + \mathcal{O}(\theta^2)$$

$$\Rightarrow \text{Tr}(t^a) = 0$$

~~die t^a bilden Basis des Raums der $N \times N$ -Matrizen mit $\text{Tr}(t^a) = 0, t^{a\dagger} = t^a$~~

$\Rightarrow (N^2 - 1)$ lin. unabhängige Matrizen

$\Rightarrow SU(N)$ ist $(N^2 - 1)$ -parametrische Liegruppe
 Generatoren der fundamentalen Darstellung bilden
 Basis des Raums der $N \times N$ -Matrizen mit
 $\text{Tr}(t^a) = 0, t^{a\dagger} = t^a$

Satz 2):

3 Generatoren, Basis des $\mathfrak{su}(2)$ in fund. Darstellung:

fund. Darst.: $t^a = \frac{\sigma^a}{2}$ \leftarrow herm. 2×2 -Matrizen, $\text{Tr}(\frac{\sigma^a}{2}) = 0$

Vert.-Rel.: $[t^1, t^2] = i t^3$ und zyklisch
 $[t^a, t^b] = i \epsilon_{abc} t^c$

~~fund.~~
adjung. Darst.: $(t^a)_{ij} := -i \epsilon_{aij}$

\Rightarrow

fund. Darst. des $SU(2)$	\cong	Spinordarst. des $SO(3)$
adj. Darst. "	\cong	Vektor/definierende Darst. des $SO(3)$

$SU(2)$ und $SO(3)$: selbe Vert.-Rel. / "local isomorph"

Weitere Darstellungen: $t^a = 0$: triv. Darstellung

z.B. $t^a := \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & n 19^a & & \\ & & n 19^a & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

reduzible Darstellung / Blockmatrix \sim erfüllt selbe Vert. Rel.

SU(3) : (weglassen)

8 Generatoren

fundamentale / definierende Darstellung

$$t^a = \frac{\lambda^a}{2}, \quad \lambda^a := \text{Gell-Mann-Matrizen}$$

mit $t^{a\dagger} = t^a, \text{Tr}(t^a) = 0$
 $\text{Tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$

$$[t^a, t^b] = i f_{abc} t^c$$

anti fund. Darstellung:

$$t^a := \frac{-\lambda^{a*}}{2} = \frac{-\lambda^{aT}}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [t^a, t^b] &= \left[-\frac{\lambda^{a*}}{2}, -\frac{\lambda^{b*}}{2} \right] = + \left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right]^* = \left(i f_{abc} \frac{\lambda^c}{2} \right)^* \\ &= i f_{abc} \left(-\frac{\lambda^{c*}}{2} \right) = i f_{abc} t^c \end{aligned}$$

→ in der Tat: Vert. Rel. erfüllt!

Nutzen:

Es lassen sich nun sinnvolle Transformationsvorschriften f. phys. Größen angeben, z.B.

$$\begin{pmatrix} \psi_L \\ e_L \\ e_R \\ u_{rot} \\ u_R^{links} \\ u_R^{rechts} \end{pmatrix} =: F$$

unter SU(3) des SM $\longrightarrow (1 - i \Sigma \theta^a T^a) F$

$$T^a = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^a}{2} & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

T 5.3 Konstruktion einer allg. Yang-Mills-Theorie

("einfache" Eichgruppe wie $SU(2)$ oder $SU(3)$)

Idee:

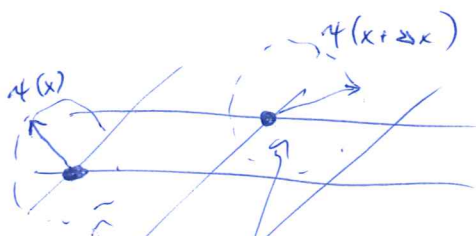
an jedem Raumzeitpunkt (x^μ) :

Freiheitsgrade / Felder $\varphi_i(x) \rightarrow$

\rightarrow def. bzgl. "innerem Koo.-system"

\rightarrow erlaube Änderungen dieses inneren K.S., die f. jedes x^μ verschieden sind

\rightarrow Wie lassen sich dann $\varphi_i(x), \varphi_i(x+dx)$ vergleichen?



bzgl. verschiedenen inneren K.S.

Materiefelder:

(Fermionen oder Skalare)

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$$

Eichgruppe: G ($= su(2), su(3), U(1) \dots$)

sei N -parametrische Liegruppe, mit
unitärer Darstellung $U(\partial_1, \dots, \partial_N) = \mathbb{1} - ig \sum \partial_a T^a$

Eichtransformation: mit $n \times n$ -Matrizen T^a (= hermitisch) $\hat{=} \text{Eichkopplung}$
Algebra $[T^a, T^b] = if_{abc} T^c$, $f_{abc} = \text{antisymmetrisch}$
("Änderung des inneren K.S.")

~~Ergebnis~~

$$\psi \longrightarrow U \psi$$

genauer $\psi(x) \longrightarrow U(\partial(x)) \psi(x)$

infinitesimal $\psi(x) \longrightarrow \psi(x) - ig \sum \partial_a(x) T^a \psi(x)$

Bem.: die Darstellung kann reduzibel sein
 \rightarrow Blockmatrizen

Ziel: Konstruktion eines eichinvarianten
Lagrangedichte

Schritt 1 - kinetischer Term von ψ

(f. Fermionen)

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \bar{\psi} i \gamma_\mu \partial^\mu \psi$$

→ nicht eichinv., denn $(\partial^\mu \psi)$ fällt nicht weg

kovariante Abl. / Eichfeld einführen!

$$\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu + i g W^\mu(x)$$

universelle
Eichkopplung

Eichfeld, hängt
evtl. von Darstellung ab

so, dass

$$\mathcal{D}^\mu \psi \longrightarrow U \mathcal{D}^\mu \psi$$

⇒ $\mathcal{L}_{\text{tot}} = \bar{\psi} i \gamma_\mu \mathcal{D}^\mu \psi$ ist eichinvariant

Bew. dies gilt, wenn

1) ~~$$W^\mu = T a W a^\mu$$~~

~~$$\uparrow$$~~

~~$$n \times n \text{-Matrix}$$~~

~~$$\uparrow$$~~

~~$$\text{Generatoren des Lorentz-Grp. f. Materiefelder}$$~~

~~$$\text{viele Vektorfelder (N St\u00fccke) darstellungen unabh\u00e4ngig}$$~~

2) ~~$$W^\mu \longrightarrow U W^\mu U^{-1} - \frac{1}{ig} (\partial^\mu U) U^{-1}$$~~

Bew.: einsetzen:

$$\begin{aligned}
 D^\mu \psi &\longrightarrow (\partial^\mu + ig W^\mu) \psi \\
 &= (\partial^\mu + ig U W^\mu U^{-1} - (\partial^\mu U) U^{-1}) U \psi \\
 &= \partial^\mu (U \psi) + ig U W^\mu \psi - (\partial^\mu U) \psi \\
 &= U [\partial^\mu \psi + ig W^\mu \psi] \\
 &= U D^\mu \psi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &\longrightarrow \bar{\psi}' i \gamma_\mu (D^\mu \psi)' \\
 &= \bar{\psi} U^\dagger i \gamma_\mu U D^\mu \psi \\
 &\stackrel{U \text{ unit\u00e4r}}{=} \bar{\psi} i \gamma_\mu D^\mu \psi
 \end{aligned}$$

Struktur von W^μ ?

inf. Transf. \rightarrow additives Term

$$\begin{aligned}
 (\partial^\mu u) \tilde{u}^\dagger &= (\partial^\mu (1 - ig \theta_a T^a)) (1 + ig \theta_a T^a) \\
 &= -ig (\partial^\mu \theta_a) T^a + \mathcal{O}(\theta^2)
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Lin. komb. der T^a

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow W^\mu &= n \times n \text{ - Matrix} \\
 &= \sum_{a=1}^N T^a W^{a\mu}
 \end{aligned}$$

\uparrow
 darstellungs-
 abhängig

\uparrow
 Generatoren
 der Darstellung

\uparrow
 N reelle Vektorfelder
 (darst.-unabh.)

Schritt 2 - Feldstärke tensor :

Ableitungsterm f. W^M ?

Def.:

$$ig F^{\mu\nu} := [D^\mu, D^\nu]$$

klar:

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow U F^{\mu\nu} U^{-1}$$

(homogene, kovariante
Transformation)

\Rightarrow

$$\mathcal{L}_{Eich} = -\frac{1}{2} \text{Tr} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})$$

Spur bzgl $n \times n$ -Matrix
häufige Normierung, S. 4.

ausrechnen: $ig F^{\mu\nu} = ig (\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu)$

$$+ (ig)^2 [W^\mu, W^\nu]$$

$$= ig T^a (\partial^\mu W^{a\nu} - \partial^\nu W^{a\mu})$$

$$+ (ig)^2 W^{a\mu} W^{b\nu} f^{abc} T^c$$

$$= ig T^a F^{a\mu\nu}$$

$$F^{a\mu\nu} = \partial^\mu W^{a\nu} - \partial^\nu W^{a\mu} - g f^{abc} W^b W^c$$

häufig: Normierung $\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$

dann: $\mathcal{L}_{Eich} = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^N F^{a\mu\nu} F^a_{\mu\nu}$

(~~das war obige~~ sonst: obige Normierung anpassen)

Beispiel - QED, Eichgruppe U(1)

Materiefelder: $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\mu \\ \psi_\tau \\ \vdots \end{pmatrix}$

Eichtransf.: $\begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\mu \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\theta Q_e} \psi_e \\ e^{-i\theta Q_\mu} \psi_\mu \\ \vdots \end{pmatrix}$

Kov. Abl. Generator $T = \begin{pmatrix} Q_e & & 0 \\ & Q_\mu & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$

kov. Abl.: $D^\mu \Psi = (\partial^\mu + ie \begin{pmatrix} Q_e & 0 \\ 0 & Q_\mu \end{pmatrix} A^\mu) \Psi$

$\mathcal{L}_{Mat} = \bar{\Psi} i \gamma_\mu D^\mu \Psi$
 $= \bar{\psi}_e i \gamma_\mu (\partial^\mu + ie Q_e A^\mu) \psi_e + \bar{\psi}_\mu i \gamma_\mu (\partial^\mu + ie Q_\mu A^\mu) \psi_\mu$

Feldstärke: $ie F^{\mu\nu}_{Matrix} = [D^\mu, D^\nu] = ie (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + (ie)^2 [T A^\mu, T A^\nu] = ie (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$
 $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

$\Rightarrow \mathcal{L}_{Eich} \text{ insgesamt} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$
 $\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{Mat} + \mathcal{L}_{Eich}$ konstruiert

Details:

Eichtransf. explizites $U = 1 - ig \partial_a T^a$

$$\psi \rightarrow (1 - ig \partial_a T^a) \psi$$

$$W^M \rightarrow -ig \underbrace{[\partial_a T^a, W^M]}_{\partial_a W^b \cdot if_{abc} T^c} + \partial^M \partial_a T^a$$

$$W^{ab} \rightarrow g f_{abc} \partial_b W^c + \partial^M \partial_a$$

Lagrangendichte

$$L_{\text{Mat}} = \bar{\psi} i \gamma_\mu D^\mu \psi$$

$$= \bar{\psi} (i \gamma_\mu \partial^\mu - g \not{W}^{ab} T^a) \psi$$

$$L_{\text{Eich}} = -\frac{1}{4} (\partial^\mu W^{\nu\rho} - \partial^\nu W^{\mu\rho} - g f_{abc} W^b W^c) (\partial_\mu W_{\nu\rho} - \partial_\nu W_{\mu\rho} - g f_{ade} W^d W^e)$$

Feynmanregeln (Struktur)

$$W^a \begin{array}{l} \nearrow \psi_i \\ \searrow \psi_j \end{array} = -ig T^a_{ij}$$

$$\left[\text{QED: } A^\mu \begin{array}{l} \nearrow \psi_i \\ \searrow \psi_j \end{array} = -ie Q_i \gamma_\mu \right]$$

$$W^a \begin{array}{l} \nearrow W^b \\ \searrow W^c \end{array} \sim g f_{abc}$$

$$W^a \begin{array}{l} \nearrow W^b \\ \searrow W^d \end{array} \sim g^2 f_{...}$$

⇒ universelle Eichkopplung g in allen WWen! Zusätzliche Faktoren $T^a_{ij}, f_{abc} \leftrightarrow$ Gruppe Darstellungen \rightarrow distoorte, bestimmte Werte

2-17) TS. 4 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ - Theorie des elektroschwachen SM
 (ohne Higgs Mechanismus)

5.4.1 Definition von \mathcal{L}

Überlegungen:

4 Vektorbosonen $\gamma, Z, W^+, W^- \longrightarrow$ nötig Eichgruppe mit 4 Generatoren

$$\rightarrow \boxed{SU(2) \times U(1)}$$

3 + 1 Generatoren

$SU(2)$ nichtabelsch $\Rightarrow \exists$ WWen zwischen Vektorbosonen z.B. $\gamma - W^+ - W^- \Rightarrow$ gut!
 Materieteilchen der 1. Generation: $\underbrace{e_L, e_R, \nu_L}_{\rightarrow \text{hier}}, \underbrace{u_L, u_R, d_L, d_R}_{\rightarrow \text{analog}}$

gesamt: $\psi = \psi_L + \psi_R = P_L \psi + P_R \psi$

\uparrow \uparrow
 einzeln Lorentzkovariant, kann jeweils verschiedene WWen haben ("chirale Eichtheorie")

Beob.: γ koppelt an e_L, e_R nicht an ν_L
 W " " " e_L, ν_L " e_R

\rightarrow Darstellung der Eichgruppe mit Generatoren auf Basis $\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix}$
 $L^a = 3 \times 3$ -Matr. = $\begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{2 Vektoren } \nu_L, e_L \\ \neq 0 \end{array} \right.$

2-18

Ansatz:

Eichgruppe $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow$ Vektorfelder $W^{a\mu}$ ($a=1-4$)
 2 Eichkopplungen g_W, g_Y unabhängig voneinander \Rightarrow $B^\mu \equiv W^{4\mu}$
 ~~B^μ~~

Materie $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix}$

Darstellung: $t^a = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^a}{2} & & \\ & \dots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ ($a=1,2,3$), $Y = t^4 = \begin{pmatrix} Y_L & 0 & 0 \\ 0 & Y_L & 0 \\ 0 & 0 & Y_R \end{pmatrix}$
 erfüllt $SU(2)$ -Algebra kommutiert mit $U(1)$ abh. \rightarrow $SU(2) \times U(1)$

Wahl $Y_L = \frac{1}{2}$, $Y_R = -1$

~~generell~~ ~~Algebra~~

$[t^a, t^b] = \begin{cases} i \epsilon^{abc} t^c & (a,b,c=1,2,3) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$

min. Eichtransf.: $\psi \rightarrow \psi + \mathcal{O} \left(-i g_W \sum_{a=1}^3 t^a \partial_\mu - i g_Y \partial_\mu Y \right) \psi$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Mat}} + \mathcal{L}_{\text{Eich}}$

$\mathcal{L}_{\text{Mat}} = \bar{\psi} i \gamma_\mu \mathcal{D}^\mu \psi$

$\mathcal{L}_{\text{Eich}} = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^3 (W^{a\mu\nu} W^a_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$

$\mathcal{D}^\mu \psi = \left(\partial^\mu + i g_W \sum_{a=1}^3 t^a W^{a\mu} + i g_Y Y B^\mu \right) \psi$

Bem.: $g_Y \neq g_W$ ist kompatibel mit Eichinv. \rightarrow bleibt allgemein

$W^{a\mu\nu} = \partial^\mu W^{a\nu} - \partial^\nu W^{a\mu} - g \epsilon^{abc} W^{a\mu} W^{b\nu}$ ($a=1,2,3$)

$B^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu$

5.4.2 Photon, Z, W[±]

Hübliche Schreibweise:

$$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad T^a L = \frac{\sigma^a}{2} L, \quad T^a e_R = 0$$

$$Y L = Y_L L, \quad Y e_R = Y_R e_R$$

Bezeichnung: $T^a, Y =$ "Isospin-/Hyperlad.-Operator"; EW von T^3 bzw Y : "Isospin Ladg./Hyper Ladung"

$$\mathcal{L}_{\text{Mat}} = \bar{L} i \gamma_\mu \mathcal{D}^\mu L + \bar{e}_R i \gamma_\mu \mathcal{D}^\mu e_R$$

$$\mathcal{D}^\mu L = \left(\partial^\mu + i g_w T^a W^{\mu} + i g_y Y B^\mu \right) L$$

$$\mathcal{D}^\mu e_R = \left(\partial^\mu + i g_y Y_R B^\mu \right) e_R$$

↑ entspricht $T^a e_R = 0$

WWen:



Ziel: bilde anschaulichere Linearkombinationen!
Betrachte genauer WW von L !

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\mu L &= \partial^\mu L + i g_w \frac{1}{2} (\sigma^1 W^{1\mu} + \sigma^2 W^{2\mu} + \sigma^3 W^{3\mu}) L + i g_y Y_L B^\mu L \\ &= \partial^\mu L + i g_w \begin{pmatrix} 0 & \frac{W^{1\mu} - i W^{2\mu}}{2} \\ \frac{W^{1\mu} + i W^{2\mu}}{2} & 0 \end{pmatrix} L + \cancel{\frac{1}{2} \sigma^3 W^{3\mu}} L \\ &\quad + i \begin{pmatrix} \frac{g_w}{2} W^{3\mu} Y_L B^\mu & 0 \\ 0 & -\frac{g_w}{2} W^{3\mu} Y_L B^\mu \end{pmatrix} L \end{aligned}$$

2-20

off-diagonal-Terme:

Def. $W^{\pm n} := \frac{W^{1n} \mp iW^{2n}}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \left[i g_{\mu} D_{\text{off-diag}}^{\mu} L = -(\bar{\nu}_L \bar{e}_L) \gamma_{\mu} \frac{g_W}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & W^{+n} \\ W^{-n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \right]$$

$$W^{+n} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} = W^{-n} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L \\ \bar{e}_L \end{pmatrix} = -i \frac{g_W}{\sqrt{2}} \gamma^{\mu}$$

beobachte W-Boson WW

diagonal-Terme:

~~$$i g_{\mu} D_{\text{diag}}^{\mu} L = -(\bar{\nu}_L \bar{e}_L) \gamma_{\mu}$$~~

$$\begin{pmatrix} A^n \\ Z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & \sin \theta_w \\ -\sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^n \\ W^{3n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B^n \\ W^{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_w & -s_w \\ s_w & c_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^n \\ Z^n \end{pmatrix}$$

$$D_{\text{diag}}^{\mu} L = i \begin{pmatrix} \frac{g_W}{2} (s A^n + c Z^n) \frac{1}{2} \gamma_{\mu} (c A^n - s Z^n) & 0 \\ 0 & -\frac{g_W}{2} (s A^n + c Z^n) + \gamma_{\mu} (c A^n - s Z^n) \end{pmatrix}$$

Wähle θ_w so, dass A^n nicht am ν_L koppelt
 $\Leftrightarrow \frac{g_W}{2} s + \frac{1}{2} c = 0$ ($\gamma_L = -\frac{1}{2}$)

$$\Leftrightarrow \tan \theta_w = \frac{g_Y}{g_W}$$

Def.:

$$e := g_W \cdot \sin \theta_w = g_Y \cos \theta_w$$

$$Q = \frac{1}{3} + Y$$

2-21

$$\leadsto D_{\text{diag}}^M \rightarrow i \left(e Q A^M + \dots \right)$$

in $D^M_{\text{diag}} L$: Koeff $\sim A^M$: $g_w s_w T^3 + g_y c_w Y = e Q$

Koeff $\sim Z^M$: $g_w c_w T^3 - g_y s_w Y = (g_w c_w - g_y s_w) T^3 - g_y s_w Q$
 $= \frac{e}{s_w c_w} T^3 - \frac{e}{s_w c_w} s_w^2 Q$

$$\bar{L}^i \gamma_\mu D_{\text{diag}}^M L = - (\bar{\nu}_L \bar{e}_L) \gamma_\mu \left[e Q A^M + \frac{e}{s_w c_w} (T^3 - s_w^2 Q) Z^M \right] \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = T^3 + Y$$

analog:
 $\bar{e}_R^i \gamma_\mu D_{\text{diag}}^M e_R = - \bar{e}_R \gamma_\mu \left[e Q A^M + \frac{e}{s_w c_w} (T^3 - s_w^2 Q) Z^M \right] e$

$$A^M_{ij} \begin{matrix} \bar{\psi}_i \\ \psi_j \end{matrix} = -i e Q_{ij} \gamma_\mu \begin{matrix} \bar{\psi}_i \\ \psi_j \end{matrix} = -i \frac{e}{s_w c_w} \begin{pmatrix} T^3_{ii} - s_w^2 Q_{ii} \\ \dots \end{pmatrix}$$

$\psi_i \in \{ e_L, \nu_L, e_R \}$

Ausdruck für e_R :

Zusammengefasst für $e_L, e_R \equiv P_L e, P_R e$

$$\begin{aligned} &\leadsto \bar{e}_L \gamma_\mu \frac{e}{s_w c_w} (T^3 - s_w^2 Q) e_L + \bar{e}_R \gamma_\mu \frac{e}{s_w c_w} (-s_w^2 Q) e_R \\ &= \bar{e} \gamma_\mu \frac{e}{s_w c_w} \left[T^3_{e_L} P_L - s_w^2 Q (P_L + P_R) \right] e \\ &= \frac{1}{2} T^3_{e_L} - s_w^2 Q - \frac{1}{2} T^3_{e_L} \gamma_5 \end{aligned}$$

wie beobachtet (s. Kap 4)

2-22 15.4.3 Feldstärke terme

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}} = -\frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \sum_{a=1}^3 W_a^{\mu\nu} W_{a\mu\nu}$$

Beispiel term:

$$\begin{aligned} W^{3\mu\nu} &= \partial^\mu W^{3\nu} - \partial^\nu W^{3\mu} - g_w \epsilon_{3ab} W^a{}^\mu W^b{}^\nu \\ &= \dots - g_w (W^{1\mu} W^{2\nu} - W^{2\mu} W^{1\nu}) \\ &= \partial^\mu (s_w A^\nu + c_w Z^\nu) - (\mu \leftrightarrow \nu) - g_w \left(\frac{W^+{}^\mu W^-{}^\nu - W^-{}^\mu W^+{}^\nu}{2} \right) \\ &= \partial^\mu (s_w A^\nu + c_w Z^\nu) - (\mu \leftrightarrow \nu) - g_w \frac{-2W^+{}^\mu W^-{}^\nu + 2W^-{}^\mu W^+{}^\nu}{-2i} \end{aligned}$$

$\Rightarrow -\frac{1}{4} W^{3\mu\nu} W_{\mu\nu}^3 \Rightarrow \dots -\frac{1}{4} \partial^\mu (s_w A^\nu + c_w Z^\nu) \frac{g_w}{2i} (-W^+{}_\mu W^-{}^\nu + W^-{}_\mu W^+{}^\nu)$
 es gibt auch weitere ähnliche Terme

2 Vertizes

$h \rightarrow \begin{matrix} \swarrow P_2 W^+ \phi \\ \searrow P_3 W^- \phi \end{matrix}$

Z^μ, A^μ

$v - i \frac{g_w}{c_w} \{e, e\}^*$

$$\left[g_{\mu\nu} (P_2 - P_1)_\beta + g_{\nu\beta} (P_3 - P_2)_\mu + g_{\beta\mu} (P_1 - P_3)_\nu \right]$$

\Rightarrow Die Ws haben alle genau die beobachtete Struktur
 \rightarrow der Ansatz reproduziert die Beobachtung

T 5.5 Higgs mechanism und W, Z-Massen

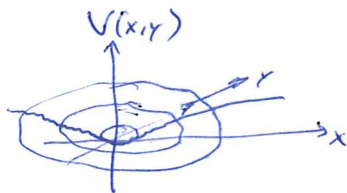
T 5.5.1 Übersicht über Symmetrien

Kontinuierliche Symmetrie:

Natur / Bew.gl. / Wirkung invariant
unter Transf. mit kontinuierlichen Parameter

- zugehörige Symmetriegruppe = Liegruppe
- Translationen, Rotationen, Lorentzboosts, Phasentransf. von Feldern, ...

Mechanik



$$L = m \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - V(x^2 + y^2)$$

rotationsinvariant

YM

$$\mathcal{L}_{\text{Mat}} = \bar{\psi} i \gamma_\mu D^\mu \psi$$

inv. unter $\psi \rightarrow U(\theta_1, \dots, \theta_N) \psi$

Feldtheorie - unterscheidet

globale Transf./Sym.

$$\psi(x) \longrightarrow U(\theta) \psi(x)$$

lokale Transf./Sym.

$$\psi(x) \longrightarrow U(\theta(x)) \psi(x)$$

z.B. Randbed: $\theta(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$
← keine Teilmenge!

Konsequenz wenn \mathcal{L} invariant;
lokal
Noethertheorem \Rightarrow Erhaltungsgröße

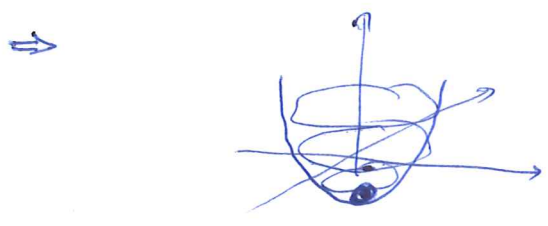
$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0$$

Konsequenz wenn \mathcal{L} invariant;
Struktur von W bosonen,
Existenz von Eichbosonen

Bem.: $\mathcal{L}_{\text{SM}}: SU(2)_L \times U(1)_Y$: global und lokal
Baryonzahl oder Leptonzahl : nur global

Realisierungen einer Symmetrie (Streng um f. globale Sym.)

a) Grundzustand / Vakuum invariant (\rightarrow eindeutig)



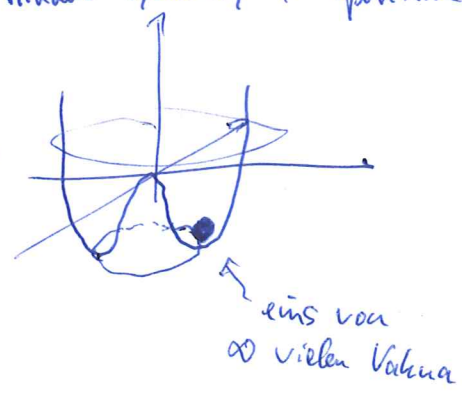
Fluktuationen um Vakuum herum: \leftrightarrow symmetrisch

(in QFT \Rightarrow erhaltene Ladung \hat{Q} , $\hat{Q}|0\rangle = 0$, $[\hat{H}, \hat{Q}] = 0$
angeregte Zustände sind EZs von \hat{Q})

SM: gilt für \hat{Q}_{em} , $\hat{Q}_{Baryonenzahl}$ \leftarrow approximativ

b) Grundzustand / Vakuum nicht invariant
"hidden symmetry" / "spontane Symmetriebrechung"

Weinflasche / Mexican Hat



- ∞ viele entartete Vakua
- eins davon realisiert (egal welches - alle äquivalent)
- Flukt. um Vakuum:
 - \rightarrow nicht symm.
 - \rightarrow über flache Richtung, Flukt. ohne E-Aufw. möglich

(in QFT \Rightarrow erh. Strom $\partial_\mu j^\mu$ aber keine erh. Ladung \times)

Fall b1) nur globale Sym. \Rightarrow flache Richt. entspricht phys. Teilchen: masseloses Goldstone boson

Fall b2) globale + lokale Sym. \Rightarrow flache Richt. entspricht Eichtransformation, \Rightarrow kein Goldstone boson

SM = Fall b2

Erfahrung (s. Üb.): Eichbosonen werden massiv.

T5.5, 2 SM Higgssektor und spontane Sym. brechung (klassische Theorie)

- 1964 Higgs et al : prinzipieller Mechanismus: SSB + lokale Sym. \Rightarrow massive Vektorbosonen
- 1967 Weinberg : Idee \rightarrow für EW WW nutzen \rightarrow SM

Postulat:

- Es gibt n skalare Felder $\phi_i(x) \leftarrow$ komplexe Zahl ($i=1,2,\dots$)
(neu! bisher nur Spinor- / Vektorfelder)
- \mathcal{L} bzw. Hamilton enthält "skalares Potential" $V(\phi_i)$
 \rightarrow im Grundzustand der Theorie wird V minimiert
- ~~skalare~~ Eichtransformation

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow U \Phi$$

mit gewisser unitärer Darstellung der $SU(2)_L \times U(1)_Y$
Eichinvarianz: V sei eichinvariant

Möglichkeiten:

$\Phi \cong SU(2)$ - Singlett
 Dublett \leftarrow liefert komplexe $M_{W,Z}$ -Werte
 Triplet
 \vdots

Ausatz für SM:

Higgs dublett

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{jeweils komplexe Skalarefelder}$$

Pot.

$$V(\Phi) = -\mu^2 |\Phi|^2 + \lambda |\Phi|^4$$

$$|\Phi|^2 := |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 = \Phi^\dagger \Phi$$

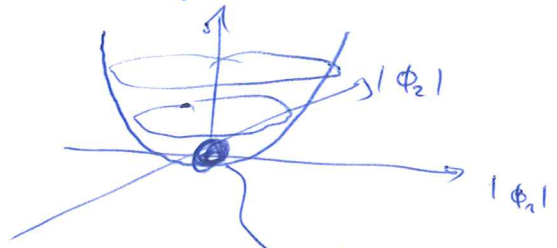
invariant unter:

$$\Phi \longrightarrow U \Phi = (1 - ig_W \frac{\sigma_a}{2} \theta_a) \Phi \quad U \in SU(2)$$

$$\Phi \longrightarrow e^{i g_Y \frac{Y}{2} \theta} \Phi \quad \left[\text{Wahl } Y_\Phi = +\frac{1}{2} \right]$$

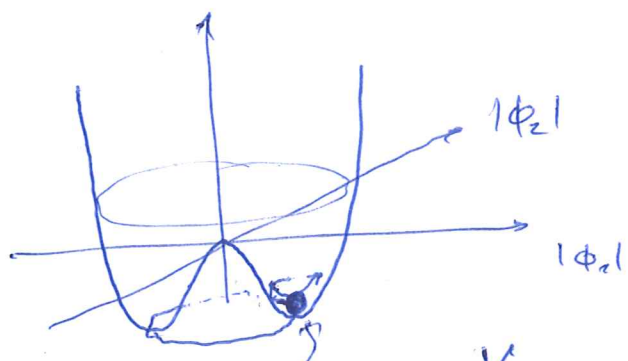
Fall 1: $\mu^2 < 0$:

Minimum bei $\Phi = 0$, Vakuum symmetrisch



einziges, sym. Minimum bei $|\Phi| = 0$

Fall 2 (\Rightarrow SM): $\mu^2 > 0$:



V symm., aber ∞ viele entartete Minima

ein unsymm. Minimum

$$V = \lambda \left(|\Phi|^2 - \frac{\mu^2}{2\lambda} \right)^2 + \lambda \frac{\mu^4}{4\lambda^2}$$

Minimum: $|\Phi_{\min}|^2 = \frac{\mu^2}{2}$

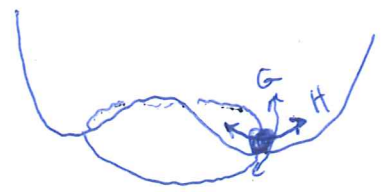
Wahl eines konkreten Min.:

$$\Phi_{\min} = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad v^2 = \mu^2/\lambda \in \mathbb{R}, v =$$

Interessant im Folgenden: Fluktuationen um Vakuumzustand:

\rightarrow Feld anregen, Teilchen

schreibe $\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G^+(x) \\ \frac{H(x) + iG^0(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$



\uparrow
äquiv. neue Felder, $= 0$ im Vakuum
 G^+ = komplex,
 H, G^0 = reell

Falls nur global, keine lokale Invarianz: $G^+, G^0 \cong$ flache Richt. \rightarrow masseloses "Goldstone"-Boson

SM: auch lokal $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichinvarianz

\Rightarrow Fluktuationen G^+, G^0 entsprechen Eichtransformation des Vakuums.

$$\Phi_{\min} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 - i g_w \frac{\partial^a \varphi^a}{2} - i g_Y \frac{Y_\Phi}{2} \partial^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i g_w (\partial^1 - i \partial^2) v/\sqrt{2} \\ [i g_w (-\frac{\partial^3}{2}) + i g_Y \frac{Y_\Phi}{2} \partial^4] v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

bel. kompl. Zahl bel. imagin. Zahl

\Rightarrow oBdA: Eichtransf. möglich, nach welcher:

$G^+(x) \equiv 0, \quad G^0(x) \equiv 0$

aber $H(x)$ nicht beeinflusst
"unitäre Eichung"

nur: $H(x) \cong$ phys. beobachtbarer Fluktuation

V in unitärer Eichung:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad |\Phi|^2 = \frac{(v+H)^2}{2} = \frac{v^2 + 2vH + H^2}{2}$$

$$V(\Phi) = \lambda \left(\frac{2vH + H^2}{2} \right)^2 + \left(\frac{\mu^4}{4\lambda^2} \right) \rightarrow \text{abgeleitet ignorieren}$$

$$= \lambda v^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{1}{4} H^4 + \frac{\mu^4}{4\lambda}$$

oBw. Massenterm. Bosonen: $\frac{1}{2} M^2 (\text{Feld})^2$ (S. 2.2)

H^2 -Term: Higgs-Massenterm, $M_H^2 = 2\lambda v^2$

T 5.5.3 Higgs - kinetische Terme; $M_{W,Z}$

kin. Terme f. Skalarfelder allg.: $\mathcal{L} = (\partial^\mu \Phi)^\dagger (\partial_\mu \Phi)$
 Massen Terme f. Bosonen allgemein: $\mathcal{L}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m^2 |\Phi|^2$
 SM: kin. Terme, lokal Eichinvariant; \leftarrow Skalar/Vektor; reell: Faktor $\frac{1}{2}$.

$$\mathcal{L}_{\Phi, \text{Mot}} = (\mathbb{D}^\mu \Phi)^\dagger (\mathbb{D}_\mu \Phi)$$

einzigste Mögl.keit
gemäß allg. YM Theorie

$$\mathbb{D}^\mu \Phi = \left(\partial^\mu + ig_W T^a W^{a\mu} + ig_Y Y_\Phi B^\mu \right) \Phi$$

$$T^a = \frac{\sigma^a}{2} \quad Y_\Phi = \frac{1}{2}$$

Auswerten in unitärer Eichung und A,Z,W-Basis

$$\mathbb{D}^\mu = \partial^\mu + \frac{ig_W}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & W^{+\mu} \\ W^{-\mu} & 0 \end{pmatrix} + i \left[e Q A^\mu + \frac{e}{s_W c_W} (T^3 - s_W^2 Q) Z^\mu \right]$$

$$Q = T^3 + Y_\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{D}^\mu \Phi = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^\mu H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\text{reell}} + \frac{ig_W}{2} \begin{pmatrix} W^{+\mu} (v+H) \\ 0 \end{pmatrix} + i \frac{e}{s_W c_W} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} Z^\mu}_{\text{imag.}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$|\mathbb{D}^\mu \Phi|^2 = | \dots |^2 + | \dots |^2 + | \dots |^2$$

~~$\mathcal{L}_{\text{Mot}, \Phi} = |\mathbb{D}^\mu \Phi|^2 = \frac{1}{2} (\partial^\mu H)(\partial_\mu H) + \frac{g_W^2}{4} v^2 \frac{W^{+\mu} W_{\mu}^-}{v} (1 + \frac{H}{v})^2 + \frac{e^2}{4 s_W^2 c_W^2} v^2 \frac{Z^\mu Z_\mu}{v} (1 + \frac{H}{v})^2$~~

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs,tot}} = \mathcal{L}_{\text{Mat}, \phi} - V$$

$$= \frac{1}{2} (\partial^\mu H)(\partial_\mu H) - \frac{1}{2} M_H^2 H^2 \left(1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right)$$

$$+ M_W^2 W^+ W^- \left(1 + \frac{H}{v} \right)^2 + \frac{M_Z^2}{2} Z^\mu Z_\mu \left(1 + \frac{H}{v} \right)^2$$


$$M_H^2 = 2 \lambda v^2$$

$$M_W^2 = \frac{g_W^2 v^2}{4}$$

$$M_Z^2 = \frac{g_W^2 v^2}{4 c_W^2}$$

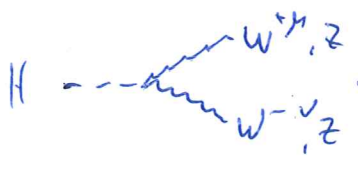
$$M_W : M_Z = c_W$$

- nur maler kin. Term f. Higgsfeld
- Massenterme f. H, W, Z $\propto v^2$ (siehe Kap. 2.2)
- Massenrelation (Vorhersage!) $M_W : M_Z = c_W$
- WW - Terme: alle $\propto (\text{Massen})^2$

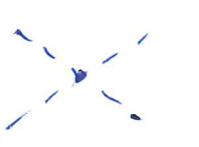


$$= -i \frac{6}{2} \frac{M_H^2}{v}$$


Sym. faktor $i \frac{\partial^3 V}{\partial H^3}$



$$= i 2 \frac{M_{W,Z}^2}{v} g^{\mu\nu}$$



$$= -i \frac{4!}{8} \frac{M_H^2}{v^2}$$



$$= i 2 \frac{M_{W,Z}^2}{v^2} g^{\mu\nu}$$

T 5.5.4 Fermion massen; Yukawa - WWen

- Eichboson massenterme $W^\mu W_\mu \rightarrow$ niemals eichinvariant
 \rightarrow benötigen Higgsmechanismus und spont. Sym.br.

- Fermion massenterme allg.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= -m \bar{\Psi} \Psi \\ &= -m (\bar{\Psi}_L + \bar{\Psi}_R) (\Psi_L + \Psi_R) \quad , \quad \bar{\Psi}_L = \bar{\Psi}_L P_R \text{ etc} \\ &= -m (\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L) \end{aligned}$$

\rightarrow wären eichinv. , falls Ψ_L, Ψ_R die selbe Eichtransf. haben ("sog. vektor-artige Fermionen")

- SM aber: $\Psi_L \rightarrow su(2)_L$ - Doublets
 $\Psi_R \rightarrow su(2)_L$ - Singlets

$\Rightarrow \bar{\Psi}_L \Psi_R$ nicht eichinvariant!
 \Rightarrow ebenfalls über Higgs mech. einführen!

- Überraschung: einfachste, eichinv. WW Higgs-Fermion liefert konkrete Fermion massen!

Yukawa - Lagrange dichte f. Leptonen : (1 Generation)

$$\mathcal{L}_{Yuk, L} = -\gamma_e \bar{L} \Phi e_R + h.c.$$

eichinw. unter $SU(2)$:

$$\begin{aligned} \bar{L} &\rightarrow \bar{L} U^\dagger \\ \Phi &\rightarrow U \Phi \\ e_R &\rightarrow e_R \end{aligned}$$

$U(1)_Y$:

$$\bar{L} \Phi e_R \rightarrow e^{-i g \underbrace{(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})}_{+\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0}} \bar{L} \Phi e_R$$

$$\mathcal{L}_{Yuk, L} = -\gamma_e \left(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L \right) \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{H + iG}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e_R + h.c.$$

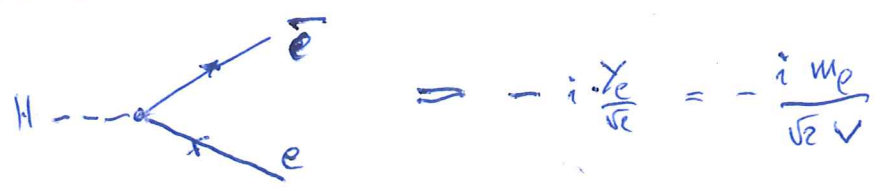
in unitärer Eichung

$$\mathcal{L}_{Yuk, L} = -\frac{\gamma_e v}{\sqrt{2}} \left(\bar{e}_L e_R \right) \left(1 + \frac{H}{v} \right) + h.c.$$

↑
... $(\bar{e}_R e_L)$

$$m_l = \frac{\gamma_e v}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{Leptonmasse}$$

- Leptonmasse
- WW - Term (n. Masse)



Yukawa - Lagrange die dte f. Quarks (1 Generation)

$$\mathcal{L}_{Yuk, Q} = -\gamma_d \bar{Q} \Phi d_R - \gamma_u \bar{Q} \Phi^c u_R \text{ th.c.}$$

$$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad \Phi^c := \begin{pmatrix} \Phi_2^+ \\ -\Phi_1^+ \end{pmatrix}$$

Detail: unter Hyperlad.: $\Phi^c \rightarrow e^{-ig_Y \theta_Y (-Y_\Phi)} \Phi^c$

$\Rightarrow \mathcal{L}_{Yuk}$ invar. unter $U(1)_Y$

unter $SU(2)_L$: $\Phi_i^c = \epsilon_{ij} \Phi_j^+$ = $SU(2)$ -Doppel

$$\begin{aligned} (\Phi_i^c)^+ &= \epsilon_{ij} \Phi_j^{+ \dagger} = \epsilon_{ij} U_{jk}^* \Phi_k^+ \\ &= U_{ij} \Phi_j^c \end{aligned}$$

$$\epsilon_{ij} U_{ii'} U_{jj'} = \det U \epsilon_{i'j'}$$

$$\Rightarrow U^T \epsilon U = \epsilon, \quad \epsilon U = U^* \epsilon$$

$\Rightarrow \mathcal{L}_{Yuk}$ eichinvariant

entsprechend in mit. Eichung

$$\mathcal{L}_{Yuk, total} = -\frac{\gamma_f v}{\sqrt{2}} \bar{e}_L e_R \left(1 + \frac{H}{v}\right) - \frac{\gamma_d v}{\sqrt{2}} \bar{d}_L d_R \left(1 + \frac{H}{v}\right) - \frac{\gamma_u v}{\sqrt{2}} \bar{u}_L u_R \left(1 + \frac{H}{v}\right) \text{ th.c.}$$

$$m_f = \frac{\gamma_f v}{\sqrt{2}} \quad (f=d, u) \quad (\text{wähle } \gamma_f \in \mathbb{R})$$

$$H \sim \begin{array}{c} \nearrow \hat{f} \\ \searrow f \end{array} = -\frac{i m_f}{\sqrt{2} v}$$

5.6 Standardmodell - Zusammenfassung & Ausblick

5.6.1 Vollständiges EWSM

$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow$ Vektorfelder $W^{a\mu}, B^\mu$ ($a=1,2,3$)
 2 Eichkopplungen g_w, g_y

Materiefermionen zerlegt in "Multipletts":

$$Q^I = \begin{pmatrix} u_L^I \\ d_L^I \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} u_R^I \\ d_R^I \end{matrix} \quad I=1,2,3 \cong \text{Generation}$$

$$L^I = \begin{pmatrix} \nu_L^I \\ e_L^I \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \nu_R^I \\ e_R^I \end{matrix}$$

Materie skalar ("Higgs")

$$\Phi = \text{Dublett}, \quad \Phi^c = i\sigma^2 \Phi^*$$

Generatoren der Eichgruppe:

"Isospin - Operator"	$T^a = \frac{\sigma^a}{2}$	Dublett ↓ Singlett	0
"Hyperbel. - Op."	Y		
"el. Lad. - Operator"	$Q = T^3 + Y$		

kovariante Ableitung

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_w W^{a\mu} T^a + ig_y Y B^\mu$$

Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{EWSM}} = & -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ & + \sum_{F=Q^I, L^I, e_R^I} \bar{\Psi} i \gamma_\mu D^\mu \Psi \\ & - \left(y_e^I \bar{L}^I \Phi e_R^I + y_d^I \bar{Q}^I \Phi d_R^I + y_u^I \bar{Q}^I \Phi u_R^I \right) \\ & + |D^\mu \Phi|^2 - (-\mu^2 |\Phi|^2 + \lambda |\Phi|^4) \end{aligned}$$

Physikalisches Gehalt / Masseneigenzustände (in niedrigster Ordnung)

Vakuum: $\Phi_{vac} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ $v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$

$\underline{\Phi} = \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{v+H+iG}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, obdA unitäre Eichung.
 $G^+ \equiv G \equiv 0$

Parameter: $\tan \theta_w = \frac{g_Y}{g_W}$, $e = s_w g_w = c_w g_Y$

Felder: $\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_w & s_w \\ -s_w & c_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ W^3 \end{pmatrix}$ $W^\pm = \frac{W^1 \mp iW^2}{\sqrt{2}}$

\Downarrow $\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu + \left\{ \begin{array}{l} \text{Dublett: } \frac{ig_w}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & w^+ \\ w^- & 0 \end{pmatrix} \\ \text{Singlett: } 0 \end{array} \right\} + ieQA^\mu + i \frac{g_w}{c_w} (T^3 - Q \sin^2 \theta_w) Z^\mu$

damit:

2. Zeile: A_i, Z, W $\begin{matrix} \nearrow \pi_i \\ \searrow \pi_j \end{matrix}$ = genau wie beobachtet (Kap. 4)

4. Zeile: Kopplung an Higgs \Rightarrow Massen

$M_H^2 = 2\lambda v^2$, $M_W^2 = \frac{g_w^2 v^2}{4}$, $M_Z^2 = \frac{M_W^2}{c_w^2}$

Vertizes



1. Zeile: A_i, Z $\begin{matrix} \nearrow w \\ \searrow w \end{matrix}$ (s. Übung)

Parameter:

Original $g_Y, g_w, \mu^2, \lambda, \theta$ \leftrightarrow phys. Koppl. e, s_w, λ, v \leftrightarrow phys. Massen e, M_W, M_Z, M_H

äquiv. unzurechenbar

5.6.2 Zwei Generationen

$$\mathcal{L}_{Yuk}^{mit. Eiding} = - \left(\frac{\chi_e^{Ij} \nu}{\sqrt{2}} \frac{1}{e_L} e_R + \frac{\chi_d^{Ij} \nu}{\sqrt{2}} \frac{1}{d_L} d_R + \frac{\chi_u^{Ij} \nu}{\sqrt{2}} \frac{1}{u_L} u_R \right) + h.c.$$

* $(1 + \frac{H}{v})$

Def. $M_f^{Ij} := \frac{\chi_f^{Ij} \nu}{\sqrt{2}} \quad (f = l, d, u)$

→ beliebige, komplexe 3x3 - Matrizen

Mathe: \exists "Singular Value Decomposition":

unitäre Matrizen U_f, V_f mit

$$U_f M_f V_f^\dagger = \text{diagonal, reell, positiv} = \begin{pmatrix} m_{f1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{f2} & 0 \\ 0 & 0 & m_{f3} \end{pmatrix}$$

Daher def. neue Felder:

$$f_L = U_f f_L', \quad f_R = V_f f_R'$$

Somit: $\mathcal{L}_{Yuk}^{u.E.}$ diagonal!

$$\mathcal{L}_{Yuk}^{u.E.} = - \left(\sum_{f=l,d,u} \sum_{I=1}^3 m_{fI} \bar{f}_L^I f_R^I + h.c. \right) \left(1 + \frac{H}{v} \right)$$

$f_{L,R}^I$: Massen - EZe

m_{fI} : " - EWe

Freiheit in U_e, U_ν :

- Neutrinos $\nu_{R,L}$ tauchen hier nicht auf
- oBd A setze $U_\nu = U_e$, ändert nichts
- ⇒ $L^I = \begin{pmatrix} \nu_L^I \\ e_L^I \end{pmatrix} = U_e^I \gamma L^I$ für gesamtes Dublett
- ⇒ U_e -Matrix fällt weg im restlichen \mathcal{L}_{EWSM}

Quark-Dublett:

$$Q^I = \begin{pmatrix} u_L^I \\ d_L^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_u^I \gamma u_L^I \\ U_d^I \gamma d_L^I \end{pmatrix} \cdot$$

↑ verschiedene Matrizen!

Def $V^{CKM} := U_u U_d^\dagger$

Was passiert in $\mathcal{L}_{EWSM}^{Rest}$:

in Termen $\sim \bar{f}_L' \dots f_L' \rightarrow \bar{f}_L \dots f_L$ (Unitarität)
 aber in Termen mit W-Wechselwirkung:

$$\begin{aligned} & W_\mu^\dagger \bar{u}_L^I \gamma^\mu d_L^I \\ & = W_\mu^\dagger \bar{u}_L^I \gamma^\mu (V^{CKM})^I \gamma d_L^I \end{aligned}$$

⇒

mit Massen-EZen

$\mathcal{L}_{EWSM}^{u, \bar{e}}$:

- Yukawas diagonal in Generationen
- $H \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{f} \\ f \end{pmatrix} = -i \frac{m_f}{\sqrt{2}v}$ immer
- ~~über~~ W -WW enthält V^{CKM}
- $W \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{u}^I \\ d^I \end{pmatrix} = -\frac{ig_W}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_L (V^{CKM})^I \gamma$
- überall sonst: keine U, V-Matrizen

* Einzige Möglichkeit für Generationen-Änderung:

W-Boson - Austausch!

* Keine Generationen-Änderung durch Photon, Z, Higgs-Austausch!

→ sehr restriktiv

→ im Einklang mit Beobachtung!

* Bem. CP - Verletzung (Materie - Antimaterie - Asymmetrie)

→ einzig aus V^{CKM} , ebenfalls restriktiv!

5.6.3 Ausblicke

SM = großartige Errungenschaft → Viele Phänomene

(klass. ED, QED, nichtrel. QM, Atom-, Molekül-, FK-Physik, Chemie, Kernphysik, ^{Hadronen} Hochenergiephysik, ^{β -Zerfall} frühes Universum)

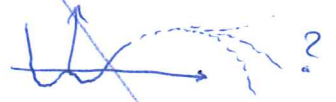
Energiebereich
Universum ab
Nukleosynthese

→ Verstanden, sind präzise quantitative Übereinstimmung mit Exp. zurückgeführt auf wenige Prinzipien:

Relativitätstheorie + QM (= QFT) + Eichinvarianz
(→ QFT - Vorlesungen)

• ~~genaues Verständnis / präziser Vergleich mit Exp.~~

~~→ Unklar, Renormierung, laufende Kopplungen, Korrekturen zu V^{Higgs}~~



• offene Fragen:

- große vereinigte WW? SU(5)?
- Warum 3 Generationen?
- Woher Higgssektor? V^{Higgs} ? Dynamisch erzeugt? SUSY?


→ exp. Suche nach weiteren Higgs bos. u. Effekten

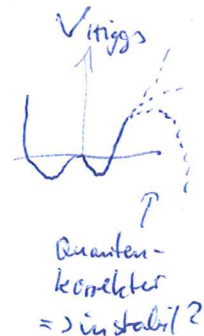
- Natur der Neutrino massen? Woher die kleinen ⁱⁿ m_{ν} Werte? → ν -Vorlesung

Ausblicke QFT - Vorlesung

- Vertiefung der Prinzipien $QM + Rel. th. \Rightarrow QFT$

- Allg. Feynmanregeln, Loops  \Rightarrow math. Problem "Renormierungstheorie"

- Loops = Quanteneffekte:

 $b \frac{m_W^2}{t s}$
 neue wichtiger Prozess!
 \rightarrow Korrektur zu M_W ist!!



Ausblicke - offene Fragen:

Neutrinomassen $\neq 0$

Dunkle Materie

~~Bohr~~
 Mat. - Antimaterie - Asym. im Universum
 $g \sim 2$ des Myon \rightarrow kleine Abweichung

$\Rightarrow \exists$ Physik jenseits des SM, aber was?

\rightarrow neue Higgschildern? (vgl. 12 Eichbos., 6 Quarks...)

\rightarrow neue Phänomene in W \rightarrow H - Vorlesung
 W \rightarrow H ?

Viele konzeptuelle Fragen:

- GUT? SU(5)?

\rightarrow Warum 3 Generationen? Woher die Werte der Masse, V^{CKM}
 \Rightarrow Neutrinos?

- Woher das Higgssektor / Potential?

\Rightarrow Supersymmetrie? Higgs analog Pion?

Higgs keine tiefere Erklärung?