

Gleichungen und Herleitungen zur Supersymmetrie

Wir geben hier die nötigen Definitionen und Rechenverfahren für allgemeine supersymmetrische Modelle an. Die in Abschnitt 4.5 angegebene Lagrangedichte kann direkt auf das MSSM oder die supersymmetrische QED oder QCD spezialisiert werden. Viele der folgenden Definitionen und Rechnungen finden sich auch in [12, 16, 5, 11] oder [10], allerdings in anderen Konventionen. Unsere Konventionen sind auf die Komponentenfelder aus [7] abgestimmt.

1 Lorentz- und Poincarégruppe und Spinoren

1.1 Poincaréalgebra

Die Lorentzgruppe ist die Gruppe aller Matrizen $\Lambda^\mu{}_\nu$ auf dem Minkowskiraum, die die Bilinearform $xy = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$ und damit die Lichtgeschwindigkeit invariant lassen. Dazu äquivalent ist

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma g^{\rho\sigma} = g^{\mu\nu}. \quad (1)$$

Der metrische Tensor $g^{\mu\nu}$ ist dabei

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (2)$$

Es ist $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$, und $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$ für einen 4-Vektor A^μ . Eine infinitesimale Lorentztransformation schreiben wir als

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad (3)$$

wobei die Bedingung (1) äquivalent zur Antisymmetrie $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ ist.

Sei nun $U(\Lambda)$ eine Darstellung der Lorentzgruppe. In dieser Darstellung schreiben wir eine infinitesimale Lorentztransformation als

$$U(\delta + \omega) = 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \quad (4)$$

mit antisymmetrischem $J^{\mu\nu}$. In der Fundamentaldarstellung ist also

$$(J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = i(g^{\mu\rho} g_\nu{}^\sigma - g^{\mu\sigma} g_\nu{}^\rho). \quad (5)$$

Die Poincarégruppe ist die Gruppe der Lorentztransformationen und Translationen auf dem Minkowskiraum. Bezeichnet (Λ, a) die Transformation $x \rightarrow \Lambda x + a$ und $U(\Lambda, a)$ eine Darstellung der Poincarégruppe, so schreiben wir für eine infinitesimale Transformation

$$U(\delta + \omega, \epsilon) = 1 + i\epsilon^\mu P_\mu - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}. \quad (6)$$

Aus diesen Definitionen folgt, daß P und J Tensoren unter Lorentztransformationen sind, daß also folgende Kovarianzeigenschaften gelten:

$$\Lambda^\mu{}_\nu U(\Lambda) P^\nu U(\Lambda)^{-1} = P^\mu, \quad (7)$$

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma U(\Lambda) J^{\rho\sigma} U(\Lambda)^{-1} = J^{\mu\nu}. \quad (8)$$

Die infinitesimale Versionen dieser Kovarianzbeziehung ist

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = (J^{\rho\sigma})^\mu{}_\lambda P^\lambda, \quad (9)$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = (J^{\rho\sigma})^\mu{}_\lambda J^{\lambda\nu} + (J^{\rho\sigma})^\nu{}_\lambda J^{\mu\lambda}. \quad (10)$$

Eine wichtige Darstellung der Poincarégruppe ist die mit Differentialoperatoren auf einem Funktionenraum auf dem Minkowskiraum. Diese Darstellung $U(\Lambda, a)$ ist definiert durch

$$(U(\Lambda, 0)f)(x) = f(\Lambda^{-1}x) \Rightarrow J^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} \equiv i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu), \quad (11)$$

$$(U(0, a)f)(x) = f(x - a) \Rightarrow P^\mu = i\partial^\mu. \quad (12)$$

Die Vorzeichen bei den Definitionen von $J^{\mu\nu}$ und P^μ wurden so gewählt, daß die Vorzeichen in dieser Darstellung den aus der Quantenmechanik üblichen entsprechen.

Sowohl aus der Differentialoperatordarstellung als auch aus den infinitesimalen Versionen der Kovarianzbeziehungen oben als auch aus der fundamentalen Darstellung der $J^{\mu\nu}$ folgen die Vertauschungsrelationen der Poincaréalgebra

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (13)$$

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho), \quad (14)$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho}). \quad (15)$$

1.2 2-Spinordarstellungen

Es ist nützlich, die Weyl-Darstellung von γ -Matrizen und den üblichen 4-Spinoren, die z.B. in der Dirac-Gleichung auftauchen, zu wählen. In dieser Darstellung zerfallen 4-Spinoren in zwei 2-Spinoren, sogenannte Weyl/van der Waerden-Spinoren mit "gepunkteten" oder "ungepunkteten" Indizes. Die γ -Matrizen und Kombinationen davon setzen sich aus 2×2 -Blockmatrizen zusammen. Wir beginnen mit einer systematischen Einführung der 2-Spinoren und zugehörigen σ -Matrizen (diese kann zunächst übersprungen werden), danach geben wir den Zusammenhang zu den üblichen 4-Spinoren und γ -Matrizen an.

Wir betrachten zunächst einen 2-Spinorraum, dessen Elemente wir mit ψ^α ($\alpha = 1, 2$) bezeichnen. Für jedes ψ^α können wir drei weitere 2-Spinoren durch Herunterziehen der Indizes und komplexe Konjugation wie folgt definieren:

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} := (\psi^\alpha)^\dagger, \quad \psi_\alpha := \epsilon_{\alpha\beta} \psi^\beta, \quad \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} := \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} = (\psi_\alpha)^\dagger. \quad (16)$$

Hierbei nehmen die Indizes die Werte $\alpha = 1, 2, \dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$ etc an, und

$$\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}, \quad \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}, \quad \epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon_{\beta\alpha}, \quad \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}, \quad \epsilon_{12} = 1, \quad \epsilon_{\dot{1}\dot{2}} = 1. \quad (17)$$

Die vier Räume der $\psi^\alpha, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}, \psi_\alpha, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$ betrachten wir als vier unterschiedliche Spinorräume, und wir werden auf jedem Raum eine unterschiedliche Darstellung der Lorentztransformationen definieren.

Wir beginnen mit den Paulimatrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

und definieren damit die 4-Vektoren von Matrizen

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu := (1, \sigma^k)_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad (19)$$

$$\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} := (1, -\sigma^k)^{\dot{\alpha}\alpha}. \quad (20)$$

Die Indizes nehmen die Werte $\alpha = 1, 2, \dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$ an. Die Indexstruktur kennzeichnet hierbei, mit welchen Spinoren die Matrizen multipliziert werden sollen.

Zunächst können wir damit Spinordarstellungen der Lorentzgruppe auf den Räumen der ψ_α und $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ definieren. Sie sind durch die Generatoren $\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}$ und $\frac{1}{2}\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ gegeben, wobei

$$(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta} := \frac{i}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_{\alpha}{}^{\beta}, \quad (21)$$

$$(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} := \frac{i}{2}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}. \quad (22)$$

Daß diese Generatoren die Algebra (15) erfüllen, läßt sich mit den leicht zu verifizierenden Gleichungen

$$(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_{\alpha}{}^{\beta} = 2\delta_{\alpha}{}^{\beta}g^{\mu\nu}, \quad (23)$$

$$(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = 2\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}g^{\mu\nu}. \quad (24)$$

beweisen. Endliche Lorentztransformationen von ψ_α sind dann im Einklang mit (6) durch

$$M(\Lambda)_{\alpha}{}^{\beta} := \left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}} \right)_{\alpha}{}^{\beta} \quad (25)$$

definiert. $M \in SL(2, \mathbb{C})$, weil $\text{Tr}(\sigma^{\mu\nu}) = 0$, also $\det M = 1$. Endliche Lorentztransformationen von $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ sind analog durch $\left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\frac{\bar{\sigma}^{\mu\nu}}{2}} \right)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}$ definiert, aber weil $\sigma^{\mu\nu\dagger} = \bar{\sigma}^{\mu\nu}$ ist, ist dies nichts anderes als

$$M^{-1\dagger}(\Lambda)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = \left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\frac{\bar{\sigma}^{\mu\nu}}{2}} \right)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}. \quad (26)$$

Die Darstellung der Lorentzgruppe auf den beiden anderen, den ψ^α - und $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$ -Räumen ist durch $\epsilon^{\alpha\beta} M_\beta^\gamma \epsilon_{\gamma\delta} = (M^{-1})_\delta^\alpha$ und $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} M^{-1\dot{\beta}\dot{\gamma}} \epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}} = (M^\dagger)^{\dot{\delta}}_{\dot{\alpha}}$ gegeben. Diese Gleichungen folgen daraus, daß $\det M = 1$ ist. Aus demselben Grund sind die ϵ -Tensoren numerisch invariant:

$$M_\alpha^\beta M_\gamma^\delta \epsilon_{\beta\delta} = \epsilon_{\alpha\gamma} \det M = \epsilon_{\alpha\gamma}. \quad (27)$$

Insgesamt transformieren die Spinoren unter der Lorentztransformation Λ wie folgt:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &\rightarrow (M)_\alpha^\beta \psi_\beta, \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} &\rightarrow (M^{-1\dagger})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}}, \\ \psi^\alpha &\rightarrow \psi^{\dot{\beta}} (M^{-1})_{\dot{\beta}}^\alpha, \\ \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} &\rightarrow \bar{\psi}_{\dot{\beta}} (M^\dagger)^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}. \end{aligned}$$

Und daher sind die folgenden Skalarprodukte lorentzinvariant:

$$\psi\chi := \psi^\alpha \chi_\alpha = -\chi_\alpha \psi^\alpha = \chi^\alpha \psi_\alpha = \chi\psi, \quad (28)$$

$$\bar{\psi}\bar{\chi} := \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\psi}. \quad (29)$$

Wir definieren hier wie überall Produkte von Spinoren antikommutierend.

Wichtige Formeln, die sich für die hier definierten Matrizen ergeben, sind:

$$(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_\alpha^\beta = 2\delta_\alpha^\beta g^{\mu\nu}, \quad (30)$$

$$(\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} = 2\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} g^{\mu\nu}, \quad (31)$$

$$\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\rho + \bar{\sigma}^\rho \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu = 2(g^{\mu\nu} \bar{\sigma}^\rho - g^{\mu\rho} \bar{\sigma}^\nu + g^{\nu\rho} \bar{\sigma}^\mu), \quad (32)$$

$$\text{Tr} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu = 2g^{\mu\nu}, \quad (33)$$

$$\text{Tr} \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\rho \sigma^\sigma = 2(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}), \quad (34)$$

$$\text{Tr} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \sigma^\rho \bar{\sigma}^\sigma = 2(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} + i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}), \quad (35)$$

$$\epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu = \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \quad (\Leftarrow \epsilon_{12} = \epsilon_{i\dot{j}}), \quad (36)$$

$$(\psi\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} = -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^{\dot{\beta}} (\bar{\sigma}^\mu \psi), \quad (37)$$

$$\alpha(\sigma^\mu \bar{\psi}) = -\epsilon_{\alpha\beta} (\bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu)^\beta, \quad (38)$$

$$\alpha(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \psi) = \epsilon_{\alpha\beta} (\psi \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)^\beta \quad (39)$$

mit dem antisymmetrischen Tensor in vier Dimensionen

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ gerade Permutation von } (1, 2, 3, 4), \\ -1 & \text{falls } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ ungerade Permutation von } (1, 2, 3, 4), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (40)$$

Aus der Gleichung (32) folgt auch das Transformationsverhalten der σ -Matrizen:

$$\Lambda^\mu{}_\nu M_\alpha^\beta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu (M^\dagger)^{\dot{\beta}}_{\dot{\gamma}} = \sigma_{\alpha\dot{\gamma}}^\mu \quad (41)$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu (M^{-1\dagger})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{\sigma}^{\nu\dot{\beta}\beta} (M^{-1})_{\beta\gamma} = \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\gamma}. \quad (42)$$

Und daraus folgt die Kovarianz von $\psi\sigma^\mu\bar{\chi}$:

$$\psi'\sigma^\mu\bar{\chi}' = \Lambda^\mu{}_\nu\psi\sigma^\nu\bar{\chi} \quad (43)$$

und entsprechend für $\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\chi$.

1.3 4-Spinordarstellung

Nun können wir den Zusammenhang zu den üblichen 4-Spinoren angeben. 4-Spinoren setzen sich aus zwei zueinander ladungskonjugierten 2-Spinoren ψ_α, χ_α zusammen:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (44)$$

Wir stellen die γ -Matrizen dar als

$$\gamma^\mu := \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

$$\gamma^5 := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$P_L := \frac{1 - \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (47)$$

$$P_R := \frac{1 + \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Die so definierten γ -Matrizen erfüllen die Clifford-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (49)$$

und

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0. \quad (50)$$

Auf dem Raum der 4-Spinoren ist die Darstellung der Lorentzgruppe durch die Generatoren

$$S^{\mu\nu} := \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}, \quad (51)$$

$$\sigma^{\mu\nu} := \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (52)$$

definiert.¹ Daß die $S^{\mu\nu}$ die Algebra (15) erfüllen, folgt allein aus der Clifford-Algebra. Wegen $P_L\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ und $P_R\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$ nennen wir ψ einen linkshändigen und $\bar{\chi}$ einen rechtshändigen 2-Spinor.

¹Die Unterscheidung im Druck zwischen den Matrizen $\sigma^{\mu\nu}$ im 4-Spinorraum und $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ im 2-Spinorraum halten wir nur in diesem Abschnitt aufrecht. Ansonsten geht aus dem Zusammenhang und der Indizierung immer hervor, welche von beiden gemeint ist.

Adjungierte und ladungskonjugierte 4-Spinoren werden wie üblich definiert:

$$\bar{\Psi} := \Psi^\dagger \gamma^0, \quad \Psi^C := i\gamma^0 \gamma^2 \bar{\Psi}^T. \quad (53)$$

Daraus ergeben sich die folgenden übersichtlichen Relationen zwischen 4- und 2-Spinoren:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = (\chi^\alpha \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}), \quad (54a)$$

$$\Psi^C = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}^C = (\psi^\alpha \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}). \quad (54b)$$

Majoranaspinoren erfüllen die Einschränkung $\Psi^C = \Psi$, also $\chi_\alpha = \psi_\alpha$. Spinoren mit $\Psi \neq \Psi^C$ nennen wir Diracspinoren.

Wichtige Formeln, die sich leicht mit 2-Spinoren verstehen lassen, sind (sogenannte Flip-Regeln, siehe dazu auch [2]):

$$\bar{\Psi}_1 P_L \Psi_2 = \bar{\Psi}_2^C P_L \Psi_1^C = \chi_1 \psi_2, \quad (55)$$

$$\bar{\Psi}_1 P_R \Psi_2 = \bar{\Psi}_2^C P_R \Psi_1^C = \bar{\psi}_1 \bar{\chi}_2, \quad (56)$$

$$\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu P_L \Psi_2 = \bar{\Psi}_2^C (-\gamma^\mu P_R) \Psi_1^C = \bar{\psi}_1 \bar{\sigma}^\mu \psi_2 = -\psi_2 \sigma^\mu \bar{\psi}_1, \quad (57)$$

$$\bar{\Psi}_1 \{1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5\} \Psi_2 = \bar{\Psi}_2^C \{1, \gamma^5, -\gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5\} \Psi_1^C. \quad (58)$$

Hermitesche Konjugation verhält sich wie folgt:

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = (\psi^\alpha)^\dagger, \quad \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = (\psi_\alpha)^\dagger, \quad (\psi_1 \psi_2)^\dagger = \bar{\psi}_2 \bar{\psi}_1, \quad (\psi_1 \sigma^\mu \bar{\psi}_2)^\dagger = \psi_2 \sigma^\mu \bar{\psi}_1. \quad (59)$$

Damit gelten folgende Gleichungen:

$$(\bar{\Psi}_1 P_L \Psi_2)^\dagger = \bar{\Psi}_2 P_R \Psi_1, \quad (60)$$

$$(\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu P_L \Psi_2)^\dagger = \bar{\Psi}_2 \gamma^\mu P_L \Psi_1, \quad (61)$$

$$(\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu P_R \Psi_2)^\dagger = \bar{\Psi}_2 \gamma^\mu P_R \Psi_1, \quad (62)$$

$$(\bar{\Psi}_1 \{1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5\} \Psi_2)^\dagger = \bar{\Psi}_2 \{1, -\gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5\} \Psi_1. \quad (63)$$

Wichtige Formeln mit den γ -Matrizen sind:

$$\begin{aligned} \gamma^5 &= i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \\ &= -\frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma, \end{aligned} \quad (64)$$

$$(\gamma^5)^2 = 1, \quad (65)$$

$$\gamma^\mu P_L = P_R \gamma^\mu, \quad (66)$$

$$\gamma^\mu P_R = P_L \gamma^\mu, \quad (67)$$

$$\gamma^5 \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \sigma_{\rho\sigma}. \quad (68)$$

Die nächsten Formeln beruhen nur auf der Clifford-Algebra (49), allerdings verallgemeinert auf eine D -dimensionale Raumzeit mit $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = D$. Daß diese beiden Gleichungen für beliebige D erfüllbar sind, zeigt die explizit in [1] konstruierte Darstellung. Es gilt:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = D, \quad (69)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = (2 - D)\gamma^\nu, \quad (70)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} - (4 - D)\gamma^\nu \gamma^\rho, \quad (71)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu + (4 - D)\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma, \quad (72)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} \text{Tr } 1, \quad (73)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = (g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \text{Tr } 1, \quad (74)$$

$$\text{Tr (ungerade Anzahl v. } \gamma^{\mu_i}) = 0. \quad (75)$$

2 Supersymmetrie und Superraum

2.1 Supersymmetrieralgebra

Die Supersymmetrieralgebra ist eine nichtvertauschende Erweiterung der Poincaréalgebra, die von den Generatoren P^μ , $J^{\mu\nu}$, Q_α und $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ erzeugt wird. Die Vertauschungsrelationen sind:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (76)$$

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho), \quad (77)$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}), \quad (78)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0, \quad (79)$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu, \quad (80)$$

$$[P^\mu, Q_\alpha] = [P^\mu, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = 0, \quad (81)$$

$$[J^{\mu\nu}, Q_\alpha] = -\frac{1}{2} \alpha(\sigma^{\mu\nu} Q). \quad (82)$$

Dabei ist die Vertauschungsrelation zwischen Q_α und $J^{\mu\nu}$ äquivalent dazu, daß Q_α ein Spinoroperator ist:

$$M(\Lambda)_\alpha{}^\beta U(\Lambda)Q_\beta U(\Lambda)^{-1} = Q_\alpha. \quad (83)$$

2.2 Superraum und Differentialoperatordarstellung

Die eigentliche Supersymmetriegruppe wird von den Generatoren Q_α , $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ und P^μ erzeugt. Ihre Elemente hängen von zwei mal zwei antikommutierenden Parametern ξ^α , $\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}$ und vier kommutierenden Parametern a_μ ab und sind durch

$$G(a, \xi, \bar{\xi}) := e^{i(aP + \xi Q + \bar{Q}\bar{\xi})} \quad (84)$$

definiert. Der Parameterraum dieser Gruppe ist das Produkt des Minkowskiraumes und zweier Spinorräume, der Superraum. Die Elemente des Superraums sind die Tupel $z = (x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$.

Der Superraum ist der natürliche Darstellungsraum der Supersymmetriealgebra, genauso wie der Minkowskiraum für Poincarétransformationen. Die Lorentztransformationen sind auf dem Superraum durch den Vektor- bzw. Spinorcharakter von $x, \theta, \bar{\theta}$ bereits definiert. Die eigentliche Supersymmetrietransformation ist:

$$(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) \rightarrow (x^\mu + i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} + i\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\theta, \theta_\alpha + \xi_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}). \quad (85)$$

Sehr nützlich ist es, genau wie für die Poincaréalgebra auch für die Supersymmetriealgebra eine Darstellung durch Differentialoperatoren zu ermitteln. Dies ist, wieder analog zum Minkowskiraum, auf dem Superraum nun möglich. Zunächst definieren wir Ableitungen nach θ auf dem Superraum²

$$\partial^\alpha\theta_\beta := \delta^\alpha{}_\beta, \quad \partial_\alpha\theta^\alpha := \delta_\alpha{}^\beta, \quad (86)$$

$$\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} := \delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}, \quad \bar{\partial}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} := \delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}. \quad (87)$$

$$\xi\partial\theta^\alpha = \xi^\alpha, \quad \bar{\xi}\bar{\partial}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}, \quad (88)$$

wobei die Ableitungen mit Spinoren antikommutieren. Die eigentlichen Differentialoperatoren, die die Darstellung der Supersymmetriealgebra bilden, sind wie folgt definiert:

$$P^\mu = i\partial^\mu, \quad (89)$$

$$Q_\alpha = i(\partial_\alpha + i_\alpha(\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu), \quad (90)$$

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = i(-\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i(\theta\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}\partial_\mu). \quad (91)$$

Diese Generatoren erfüllen

$$e^{i(aP + \xi Q + \bar{Q}\bar{\xi})} F(x, \theta, \bar{\theta}) = F(x - a - i\xi\sigma\bar{\theta} - i\bar{\xi}\bar{\sigma}\theta, \theta - \xi, \bar{\theta} - \bar{\xi}) \quad (92)$$

für Funktionen $F(x, \theta, \bar{\theta})$ auf dem Superraum.

2.3 Kovariante Ableitungen und Integrale

Es ist günstig, supersymmetriekovariante Ableitungen zu ermitteln. Zum einen ist nach der Algebra die Ortsableitung ∂_μ kovariant: $[\partial_\mu, Q_\alpha] = 0$. Es gibt zum anderen auch kovariante Ergänzungen der ∂_α :

$$D_\alpha := \partial_\alpha - i_\alpha(\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu, \quad (93)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} := -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i(\theta\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}\partial_\mu, \quad (94)$$

$$D^\alpha := \epsilon^{\alpha\beta}D_\beta = -\partial^\alpha + i(\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu)^\alpha\partial_\mu, \quad (95)$$

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}} := \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{D}_{\dot{\beta}} = \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} - i^{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^\mu\theta)\partial_\mu. \quad (96)$$

²Diese Konvention hat allerdings die Folge, daß $\partial_\alpha = -\epsilon_{\alpha\beta}\partial^\beta$ und $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} = -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}^{\dot{\beta}}$ ist. Eine natürliche Definition gibt es durch Gl. (88) nur für ∂_α und $\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}$.

Diese Ableitungen erfüllen

$$\{D_\alpha, Q_\alpha\} = \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = \{D_\alpha, D_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0, \quad (97)$$

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu. \quad (98)$$

Nun definieren wir Integrale auf dem Superraum.

$$\int d\theta_\alpha 1 := 0, \quad \int d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} 1 := 0, \quad (99)$$

$$\int d\theta_\alpha \theta^\beta := \delta_\alpha^\beta, \quad \int d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}_{\dot{\beta}} := \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}, \quad (100)$$

$$\int d\theta_\alpha \theta^\beta \theta^\gamma := \delta_\alpha^\beta \theta^\gamma - \theta^\beta \delta_\alpha^\gamma, \quad \int d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \bar{\theta}_{\dot{\gamma}} := \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{\theta}_{\dot{\gamma}} - \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\gamma}}, \quad (101)$$

$$\int d\theta_\alpha \bar{\theta}_{\dot{\beta}} := -\bar{\theta}_{\dot{\beta}} \int d\theta_\alpha, \quad \int d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \theta^\beta := -\theta^\beta \int d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \quad (102)$$

$$\int d^2\theta := \frac{1}{4} \epsilon^{\alpha\beta} \int d\theta_\alpha d\theta_\beta, \quad \int d^2\bar{\theta} := \frac{1}{4} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \int d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} d\bar{\theta}^{\dot{\beta}}. \quad (103)$$

Damit ergeben sich die wichtigen Gleichungen

$$\int d^2\theta \theta\theta = \frac{1}{4} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\delta} (\delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\delta - \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\delta) = 1, \quad (104)$$

$$\int d^2\bar{\theta} \bar{\theta}\bar{\theta} = 1. \quad (105)$$

Diese Integrale sind damit für beliebige Integranden definiert, denn wegen der Antikommutativität gibt es nur Polynome 2. Grades in θ_1, θ_2 oder $\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2$. Somit verschwinden Integrale über totale θ -Ableitungen:

$$\int d^2\theta \partial_\alpha f(\theta) = \int d^2\bar{\theta} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} f(\bar{\theta}) = 0. \quad (106)$$

Deltafunktionen lassen sich durch $\delta^2(\theta) := \theta\theta$ und $\delta^2(\bar{\theta}) := \bar{\theta}\bar{\theta}$ definieren. Sie erfüllen:

$$\int d^2\theta \delta^2(\theta) (a + b^\alpha \theta_\alpha + c\theta\theta) = a, \quad (107)$$

$$\int d^2\bar{\theta} \delta^2(\bar{\theta}) (a + b_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + c\bar{\theta}\bar{\theta}) = a. \quad (108)$$

Verschwinden Integrale von totalen Raumableitungen über den ganzen Minkowski-raum, so lassen sich die θ -Integrale durch kovariante Ableitungen ersetzen. Es ist nämlich

$$\frac{D^\alpha D_\alpha}{-4} \theta\theta = \frac{\bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}}}{-4} \bar{\theta}\bar{\theta} = 1. \quad (109)$$

Deshalb ist

$$\int d^4x \int d^2\theta F(x, \theta, \bar{\theta}) = \int d^4x \frac{D^\alpha D_\alpha}{-4} F(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (110)$$

und genauso

$$\int d^4x \int d^2\bar{\theta} F(x, \theta, \bar{\theta}) = \int d^4x \frac{\bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}}}{-4} F(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (111)$$

Zuletzt definieren wir noch das Integral

$$\int d^4\theta := \int d^2\theta d^2\bar{\theta}. \quad (112)$$

Damit sind die Integrale ein Mittel, um aus Polynomen in den θ und $\bar{\theta}$ gewisse Komponenten herausprojizieren. $\int d^4\theta$ ergibt die $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ -Komponente, $\int d^4\theta\delta^2(\bar{\theta})$ die $\theta\theta$ -Komponente, $\int d^4\theta\delta^2(\theta)$ die $\bar{\theta}\bar{\theta}$ -Komponente und $\int d^4\theta\delta^2(\theta)\delta^2(\bar{\theta})$ die 1-Komponente.

2.4 Formelsammlung

Weitere wichtige Formeln mit den θ -Variablen sind:

$$\theta^\alpha \theta_\beta = \frac{1}{2} \delta^\alpha{}_\beta \theta\theta, \quad (113)$$

$$\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \frac{1}{2} \delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \bar{\theta}\bar{\theta}, \quad (114)$$

$$\partial_\alpha \theta\theta = 2\theta_\alpha, \quad (115)$$

$$\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}\bar{\theta} = 2\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \quad (116)$$

$$\theta\sigma^\mu \bar{\psi} = -\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu \theta, \quad (117)$$

$$\psi\theta \theta_\alpha = -\frac{1}{2} \theta\theta \psi_\alpha, \quad (118)$$

$$\bar{\psi}\theta \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{2} \bar{\theta}\bar{\theta} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}, \quad (119)$$

$$\theta\sigma^\mu \bar{\chi} \theta\psi = -\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu \theta \theta\psi = \frac{1}{2} \theta\theta \bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu \psi = -\frac{1}{2} \theta\theta \psi\sigma^\mu \bar{\chi}, \quad (120)$$

$$\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu \chi \bar{\theta}\bar{\psi} = -\chi\sigma^\mu \bar{\theta} \bar{\theta}\bar{\psi} = \frac{1}{2} \bar{\theta}\bar{\theta} \chi\sigma^\mu \bar{\psi} = -\frac{1}{2} \bar{\theta}\bar{\theta} \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu \chi, \quad (121)$$

$$\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\theta} = \bar{\theta}\bar{\theta} g^{\mu\nu}, \quad (122)$$

$$\theta\sigma^\mu \bar{\theta} \theta\sigma^\nu \bar{\theta} = -\theta\sigma^\mu \bar{\theta} \bar{\theta}\bar{\sigma}^\nu \theta = \frac{1}{2} \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} g^{\mu\nu}, \quad (123)$$

$$\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\rho \sigma^\sigma \bar{\theta} = \frac{1}{2} \bar{\theta}\bar{\theta} \text{Tr} \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\rho \sigma^\sigma, \quad (124)$$

$$\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\rho \theta = -\theta\sigma^\rho \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \bar{\theta}. \quad (125)$$

3 Superfelder

Superfelder sind Funktionen auf dem Superraum, die in den θ -Variablen analytisch sind [9, 6]. Die Taylorentwicklung in den θ bricht wegen der Antikommutativität ab und die Entwicklungskoeffizienten sind Funktionen auf dem Minkowskiraum, die Komponentenfelder. Wir betrachten skalare Superfelder, deren Supersymmetrietransformationen durch

$$F'(x', \theta', \bar{\theta}') := F(x, \theta, \bar{\theta}), \quad F' = e^{i(aP + \xi Q + \bar{Q}\xi)} F \quad (126)$$

mit den Differentialoperatoren (89) definiert sind. Durch verschiedene weitere Einschränkungen an die Superfelder erhalten wir möglichst kleine Supersymmetriemultipletts.

3.1 Chirale Superfelder

Skalare Superfelder, die der Einschränkung

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi = 0 \quad (127)$$

genügen, heißen chiral. Wir werden zeigen, daß chirale Superfelder als fermionischen Freiheitsgrad einen linkshändigen Spinor enthalten. Wegen $\{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_{\beta}\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0$ ist diese Einschränkung kovariant unter Supersymmetrie. Die allgemeine Lösung zu dieser Gleichung finden wir in der chiralen Basis $(y, \theta_1, \bar{\theta}_1)$ mit

$$x^{\mu} = y^{\mu} + i\theta_1 \sigma^{\mu} \bar{\theta}_1, \quad \theta = \theta_1, \quad \bar{\theta} = \bar{\theta}_1. \quad (128)$$

In dieser Basis ist (Konvention $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} := \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$)

$$\begin{aligned} -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}^1 &= -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i(\theta_1 \sigma^{\mu})_{\dot{\beta}} (\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}^1 \bar{\theta}_1^{\dot{\beta}}) \partial_{\mu} \\ &= -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i(\theta \sigma^{\mu})_{\dot{\alpha}} \partial_{\mu} \\ &= \bar{D}_{\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (129)$$

Entsprechend folgt

$$D_{\alpha} = \partial_{\alpha}^1 - 2i_{\alpha}(\sigma^{\mu} \bar{\theta}_1) \partial_{\mu}^1 \quad (130)$$

Also hat ein allgemeines chirales Superfeld die Form

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \phi(y, \theta) = e^{-i\theta \sigma^{\mu} \bar{\theta} \partial_{\mu}} \phi(x, \theta), \quad (131)$$

in Komponenten:

$$\begin{aligned} \phi(y, \theta) &= A(y) + \sqrt{2} \theta \psi(y) + \theta \theta F(y), \\ \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= A(x) + \sqrt{2} \theta \psi(x) + \theta \theta F(x) \end{aligned} \quad (132)$$

$$\begin{aligned} &-i\theta \sigma^{\mu} \bar{\theta} \partial_{\mu} A(x) - \frac{1}{4} \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \partial^{\mu} \partial_{\mu} A(x) \\ &-\frac{i}{\sqrt{2}} \theta \theta \bar{\theta} \bar{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} \psi(x). \end{aligned} \quad (133)$$

Die Felder A, ψ, F bilden ein chirales Multiplett. A und F sind komplexe Skalarfelder und ψ ist ein linkshändiger 2-Spinor.

3.2 Antichirale Superfelder

Antichirale Superfelder $\bar{\Phi}$ sind durch die Einschränkung

$$D_\alpha \bar{\Phi} = 0 \quad (134)$$

definiert. $\bar{\Phi} \equiv \Phi^\dagger$ ist genau dann antichiral, wenn Φ chiral ist. Die Komponentenz-erlegung eines allgemeinen antichiralen Superfeldes ist daher:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) &= A^\dagger(x) + \sqrt{2} \bar{\theta} \bar{\psi}(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} F^\dagger(x) \\ &\quad + i \theta \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu A^\dagger(x) - \frac{1}{4} \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \partial^\mu \partial_\mu A^\dagger(x) \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}(x) \end{aligned} \quad (135)$$

Die Felder $A^\dagger, \bar{\psi}, F^\dagger$ bilden das antichirale Multiplett. A^\dagger und F^\dagger sind komplexe Skalarfelder und $\bar{\psi}$ ist ein rechtshändiger 2-Spinor.

3.3 Vektorsuperfelder

Vektorsuperfelder sind reelle skalare Superfelder:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (136)$$

Sie enthalten gewöhnliche Vektorfelder. Unsere späteren supersymmetrischen Modelle sind eichinvariant unter

$$V \rightarrow V' := V + i(\Lambda - \bar{\Lambda}), \quad (137)$$

wobei Λ ein chirales Superfeld ist. Da die $1, \theta, \theta\theta$ -Komponenten von Λ wegen (133) unabhängig voneinander wählbar sind, können wir als Eichbedingung die Wess-Zumino-Eichung wählen, in der die $1, \theta, \theta\theta$ - und wegen der Realität von V auch die $\bar{\theta}, \bar{\theta}\bar{\theta}$ -Komponenten von V verschwinden. Die Komponentenz-erlegung in dieser Eichung ist dann:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = \theta \sigma^\mu \bar{\theta} v_\mu + i \theta \theta \bar{\theta} \bar{\lambda}(x) - i \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \lambda(x) + \frac{1}{2} \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} D(x) \quad (138)$$

Die Wess-Zumino-Bedingung legt die Eichung nicht vollständig fest. Die $1, \theta, \theta\theta$ -Komponenten bleiben genau dann unverändert, wenn wir

$$\Lambda := A - i \theta \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu A - \frac{1}{4} \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \square A$$

wählen, wobei $A - A^\dagger = 0$ ist, so daß

$$\Lambda - \bar{\Lambda} = -i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu(A + A^\dagger).$$

Das heißt, die Wess-Zumino-Bedingung legt die Eichung fest bis auf die übliche Invarianz unter $v_\mu \rightarrow v_\mu + \partial_\mu\alpha$ mit reellem α . Das Vektormultiplett besteht aus den Komponenten von V . Die einzigen Komponenten, die sich nicht wegeichen lassen, sind das reelle Vektorfeld v_μ , das reelle Skalarfeld D und die links- und rechtshändigen Spinoren $\lambda, \bar{\lambda}$.

4 Supersymmetrische Wechselwirkungen

Wir berechnen nun einige wichtige Wechselwirkungsterme in Komponenten. Das Modell enthalte ein Materiemultiplett aus chiralen Superfeldern Φ und ein Vektorfeldmultiplett $V = T^a V^a$ mit den Generatoren T^a einer einfachen Eichgruppe. Wir fordern Invarianz unter der Eichtransformation:

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow e^{-i2g\Lambda}\Phi, \\ \bar{\Phi} &\rightarrow \bar{\Phi}e^{i2g\bar{\Lambda}}, \\ e^{2gV} &\rightarrow e^{-i2g\bar{\Lambda}}e^{2gV}e^{i2g\Lambda}, \end{aligned} \tag{139}$$

wobei $\Lambda = \Lambda^a T^a$ Werte in der Lie-Algebra hat und die Λ^a chirale Superfelder sind. Infinitesimal ist also $\delta V^a = i(\Lambda^a - \bar{\Lambda}^a)$ für jedes a , wie oben schon benutzt. Bei den folgenden Berechnungen ignorieren wir totale Ableitungen.

4.1 Allgemeine supersymmetrische Terme

Supersymmetrische Terme, die nur noch von x abhängen, bekommen wir durch Ausintegrieren der θ -Abhängigkeit der Superfelder.

Es gilt: Für ein allgemeines skalares Superfeld $F(x, \theta, \bar{\theta})$ ist

$$\int d^4\theta F(x, \theta, \bar{\theta}) \tag{140}$$

supersymmetrisch, und für chirale Superfelder ist sogar schon

$$\int d^2\theta \Phi(x, \theta, \bar{\theta})|_{\bar{\theta}=0} = \int d^4\theta \delta^2(\bar{\theta})\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \tag{141}$$

supersymmetrisch.

Beweis: Wir zeigen, daß das Ortsintegral, also die Wirkung, invariant unter Supersymmetrietransformationen, erzeugt durch $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$, ist. Zunächst gilt

$$\int d^4x d^4\theta Q_\alpha F(x, \theta, \bar{\theta}) = \int d^4x d^4\theta i(\partial_\alpha + i_\alpha(\sigma^\mu \bar{\theta})\partial_\mu)F(x, \theta, \bar{\theta}) = 0, \quad (142)$$

da die Integrale über totale Ableitungen nach x^μ oder θ_α verschwinden. Aus demselben Grund gilt auch $\int d^4x d^4\theta \bar{Q}_{\dot{\alpha}}F = 0$ und $\int d^4x d^2\theta Q_\alpha\Phi = 0$. Um zu zeigen, daß auch $\int d^4x d^2\theta \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\Phi$ verschwindet, benutzen wir die Chiralität von Φ in Form der Darstellung $\Phi = e^{-i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu}\phi(x, \theta)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int d^4x d^4\theta \delta^2(\bar{\theta})\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= \int d^4x d^4\theta \delta^2(\bar{\theta})(-i\bar{\partial}_{\dot{\alpha}})e^{-i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu}\phi(x, \theta) \\ &= \int d^4x d^4\theta \delta^2(\bar{\theta})(-i\bar{\partial}_{\dot{\alpha}})(-i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu)\phi(x, \theta) \\ &= \int d^4x d^4\theta \partial_\mu\delta^2(\bar{\theta})(\theta\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}\phi(x, \theta) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (143)$$

Damit ist die Supersymmetrieminvarianz bewiesen.

Eine wichtige, andere Formulierung desselben Sachverhalts ist: die D -Komponente jedes Superfeldes und die F -Komponente eines chiralen Superfeldes sind supersymmetrisch, bis auf totale Ableitungen. Wichtig ist auch, daß Produkte von (chiralen) Superfeldern wieder (chirale) Superfelder sind. Daher ist

$$\int d^4\theta(\text{beliebiges Produkt von Superfeldern}), \quad (144)$$

$$\int d^2\theta(\text{beliebiges Produkt von chiralen Superfeldern})|_{\bar{\theta}=0} \quad (145)$$

immer supersymmetrisch (bis auf totale Ableitungen).

4.2 Materie–Eichfeldwechselwirkungen

Renormierbare supersymmetrische Modelle können mittels der bereits eingeführten chiralen, antichiralen und Vektorsuperfelder eingeführt werden. Chirale und Antichirale Superfelder beinhalten hierbei die Skalar- und Fermionfelder, die man im Sprachgebrauch von Eichtheorien als Materiefelder bezeichnet, Vektorsuperfelder enthalten die Eichfelder und deren Superpartner.

Als ersten supersymmetrischen Term geben wir den kinetischen Term von Materiefeldern (i.e. chiralen Superfeldern), inklusive minimaler Kopplung chiraler an Vektorsuperfelder an,

$$\int d^4\theta \bar{\Phi} e^{2gV} \Phi. \quad (146)$$

Dieser Term ist supersymmetrisch und invariant unter der Eichtransformation (139).

In der Wess-Zumino-Eichung bricht die Reihe e^{2gV} ab. Es ist

$$V^2 = \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}v^\mu v_\mu \quad (147)$$

und alle höheren Potenzen von V verschwinden. In Komponenten lautet der sich ergebende Wechselwirkungsterm

$$\begin{aligned} \int d^4\theta\bar{\Phi}e^{2gV}\Phi &= F^\dagger F + (\partial^\mu A^\dagger - igA^\dagger v^\mu)(\partial_\mu A + igv_\mu A) + \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu(i\partial_\mu - gv_\mu)\psi \\ &\quad -\sqrt{2}g(i\bar{\psi}\lambda A - A^\dagger i\lambda\psi) + gA^\dagger DA \end{aligned} \quad (148)$$

Hier taucht nun die eichkovariante Ableitung auf:

$$D_\mu := \partial_\mu + igv_\mu. \quad (149)$$

Die Felder F haben keine kinetischen Terme. Sie sind Hilfsfelder, die später durch Einsetzen ihrer Feldgleichungen eliminiert werden können.

4.3 Superpotential

Eine weitere offensichtlich supersymmetrische Klasse von Termen ist

$$\int d^2\theta W(\Phi),$$

wobei W ein Polynom maximal dritten Grades in chiralen Superfeldern ist. Wir nennen W das Superpotential. Die Komponentenzzerlegungen von entsprechenden Termen sind:

$$\int d^2\theta\Phi_1\Phi_2 = A_1F_2 + F_1A_2 - \psi_1\psi_2, \quad (150)$$

$$\begin{aligned} \int d^2\theta\Phi_1\Phi_2\Phi_3 &= F_1A_2A_3 + A_1F_2A_3 + A_1A_2F_3 \\ &\quad - A_1\psi_2\psi_3 - \psi_1A_2\psi_3 - \psi_1\psi_2A_3 \end{aligned} \quad (151)$$

Wichtig ist, daß die Terme mit den Spinoren ein anderes Vorzeichen haben. Es kommt von der Gleichung $(\psi_1\theta)(\psi_2\theta) = -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\psi_1\psi_2)$.

4.4 Kinetische Terme der Eichfelder

Exemplarisch betrachten wir die kinetischen Terme für die Vektorsuperfelder ausführlicher. Wir definieren chirale und antichirale Feldstärken:

$$W_\alpha := -\frac{1}{4}\overline{DD}(e^{-2gV}D_\alpha e^{2gV}) \quad (152)$$

$$\overline{W}_{\dot{\alpha}} := -\frac{1}{4}DD((\overline{D}_{\dot{\alpha}}e^{2gV})e^{-2gV}) \quad (153)$$

Die Feldstärken transformieren kovariant unter Eichtransformationen:

$$W_\alpha \rightarrow e^{-2ig\Lambda} W_\alpha e^{2ig\Lambda}, \quad (154)$$

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} \rightarrow e^{-2ig\bar{\Lambda}} \bar{W}_{\dot{\alpha}} e^{2ig\bar{\Lambda}}. \quad (155)$$

In der Wess-Zumino-Eichung gibt es folgende Summanden zu W_α :

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{\overline{DD}}{-4} D_\alpha 2gV, \\ (2) &= \frac{\overline{DD}}{-4} D_\alpha 2g^2VV, \\ (3) &= \frac{\overline{DD}}{-4} (-2gV) D_\alpha 2gV, \\ (4) &= \frac{\overline{DD}}{-4} (-2gV) D_\alpha 2g^2VV, \\ (5) &= \frac{\overline{DD}}{-4} (2g^2VV) D_\alpha 2gV, \\ (6) &= \frac{\overline{DD}}{-4} (2g^2VV) D_\alpha 2g^2VV. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Komponenten von W_α benutzen wir die chirale Basis, ohne dies durch einen Index zu kennzeichnen. Der einzige Unterschied in der Komponentenerlegung von V ist dabei, daß $v_\mu(x)$ durch

$$v_\mu(x + i\theta\sigma\bar{\theta}) = v_\mu(x) + i\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\partial_\nu v_\mu(x)$$

zu ersetzen ist. Es ist anhand der Komponentenerlegung von V nun leicht zu sehen, daß die Terme (4), (5), (6) verschwinden. Die anderen Terme sind mit der Abkürzung $v_{\mu\nu} := \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$:

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{\overline{DD}}{-4} \left[\partial_\alpha 2gV - 2i_\alpha(\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu 2gV \right] \\ &= -2ig\lambda_\alpha + 2g\theta_\alpha D - 2g_\alpha(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda})\theta\theta \\ &\quad + \frac{\overline{DD}}{-4} \left[ig_\alpha(\sigma^\mu\bar{\theta})\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\partial_\nu v_\mu + ig\theta\sigma^\mu\bar{\theta}_\alpha(\sigma^\nu\bar{\theta})\partial_\nu v_\mu - 2ig_\alpha(\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\theta\sigma^\nu\bar{\theta}v_\nu \right] \\ &= -2ig\lambda_\alpha + 2g\theta_\alpha D - ig_\alpha(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta)v_{\mu\nu} - 2g_\alpha(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda})\theta\theta, \end{aligned} \quad (156)$$

$$(2) = 2g^2\theta_\alpha v^2. \quad (157)$$

Da jeder Term in V mindestens ein $\bar{\theta}$ enthält, trägt zu (3) nur der ∂_α -Anteil von D_α bei:

$$(3) = \frac{\overline{DD}}{-4} (-2gV)\partial_\alpha 2gV$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\overline{DD}}{-4}(-4g^2)V \left[\alpha(\sigma^\mu\bar{\theta})v_\mu + 2i\theta_\alpha\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\lambda_\alpha + \theta_\alpha\bar{\theta}\bar{\theta}D \right] \\
&= \frac{\overline{DD}}{-4}(-4g^2)V \left[\alpha(\sigma^\mu\bar{\theta})v_\mu + 2i\theta_\alpha\bar{\theta}\bar{\lambda} \right] \\
&= \frac{\overline{DD}}{-4}(-4g^2) \left[\theta\sigma^\nu\bar{\theta}v_\nu \alpha(\sigma^\mu\bar{\theta})v_\mu + 2i\theta\sigma^\nu\bar{\theta}v_\nu\theta_\alpha\bar{\theta}\bar{\lambda} + i\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\lambda} \alpha(\sigma^\mu\bar{\theta})v_\mu \right] \\
&= \frac{\overline{DD}}{-4}(-4g^2) \left[\frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta} \alpha(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta)v_\nu v_\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta \alpha(\sigma^\nu v_\nu\bar{\lambda}) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta} \alpha(\sigma^\mu\bar{\lambda})v_\mu \right] \\
&= -4g^2 \left[\frac{1}{2} \alpha(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta)v_\nu v_\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta} \alpha(v^\mu\sigma_\mu\bar{\lambda} - \sigma_\mu\bar{\lambda}v^\mu) \right]. \tag{158}
\end{aligned}$$

In der Summe taucht nun der Kommutator

$$igF_{\mu\nu} := [D_\mu, D_\nu] = ig(v_{\mu\nu} + ig[v_\mu, v_\nu]), \tag{159}$$

auf. Bei einer abelschen Eichgruppe wäre offenbar (2) + (3) = 0. Insgesamt:

$$\begin{aligned}
W_\alpha &= -2ig\lambda_\alpha + 2g\theta_\alpha D - \alpha(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta) [D_\mu, D_\nu] \\
&\quad - 2g\theta\bar{\theta} \left(\alpha(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}) + ig[v^\mu, \alpha(\sigma_\mu\bar{\lambda})] \right). \tag{160}
\end{aligned}$$

Bei dem Produkt $\int d^2\theta W^\alpha W_\alpha$ taucht als einzige Schwierigkeit folgender Term auf:

$$\begin{aligned}
\alpha(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta)_\alpha(\sigma^\rho\bar{\sigma}^\sigma\theta) &= \epsilon^{\alpha\beta} \beta(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta)_\alpha(\sigma^\rho\bar{\sigma}^\sigma\theta) \\
&= \theta\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\sigma^\rho\bar{\sigma}^\sigma\theta \\
&= \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\text{Tr}(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\sigma^\rho\bar{\sigma}^\sigma) \\
&= \bar{\theta}\bar{\theta}(g^{\nu\mu}g^{\rho\sigma} - g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma}g^{\mu\rho} + i\epsilon^{\nu\mu\rho\sigma}). \tag{161}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int d^2\theta W^\alpha W_\alpha &= 4ig^2\lambda\sigma^\mu(\partial_\mu\bar{\lambda} + ig[v_\mu, \bar{\lambda}]) \\
&\quad - 4ig^2(\partial^\mu\bar{\lambda} + ig[v^\mu, \bar{\lambda}])\bar{\sigma}_\mu\lambda \\
&\quad + 4g^2DD + 2([D_\mu, D_\nu])^2 + \text{tot.Abl.} \tag{162}
\end{aligned}$$

Die totale Ableitung, die hierbei auftaucht, stammt von dem Term proportional zu $\epsilon^{\nu\mu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$, der störungstheoretisch keine Rolle spielt, aber nichtstörungstheoretische Effekte produzieren kann.

Wir erhalten endlich den eichinvarianten und supersymmetrischen kinetischen Term durch Bilden der Spur dieses Ausdrucks. Dabei verwenden wir die Normierung

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \kappa\delta^{ab} \tag{163}$$

der Generatoren der Eichgruppe und die Definition

$$[T^a, T^b] = if_{abc}T^c \tag{164}$$

der Strukturkonstanten. Die adjungierte Darstellung der Lie-Algebra ist durch $(T^{\text{ad}})^a{}_{bc} = -if_{abc}$ gegeben. Diese adjungierte Darstellung tritt in der kovarianten Ableitung von λ^a auf. Der Feldstärketensor ist durch

$$F_{\mu\nu}^a = v_{\mu\nu}^a - ig(T^{\text{ad}})^{abc}v_{\mu}^bv_{\nu}^c \quad (165)$$

gegeben. Der kinetische Term ist für die Eichfelder, die Gauginos, und deren Wechselwirkung (die durch Supersymmetrie und Eichinvarianz bestimmt ist) ist:

$$\begin{aligned} & \int d^4\theta \frac{1}{16g^2\kappa} \text{Tr} [W^\alpha W_\alpha \delta^2(\bar{\theta}) + h.c.] \\ &= \int d^4\theta \frac{1}{16g^2} [W^{a\alpha} W_\alpha^a \delta^2(\bar{\theta}) + h.c.] \\ &= \frac{1}{2} D^a D^a - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{i}{2} \bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \lambda)^a + \frac{i}{2} \lambda^a \sigma^\mu (D_\mu \bar{\lambda})^a. \end{aligned} \quad (166)$$

Die Hilfsfelder D^a haben offenbar keinen kinetischen Term.

4.5 Lagrangedichte eines allgemeinen Modells

Wir betrachten ein Modell, das ein Materiemultipllett aus chiralen Superfeldern Φ und ein Vektorfeldmultipllett $V = T^a V^a$ enthalte. Die Darstellung der Eichgruppe auf dem Materiemultipllett muß dabei nicht irreduzibel sein. Die allgemeine eichinvariante, supersymmetrische und renormierbare Lagrangedichte ist dann

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int d^4\theta \left(\bar{\Phi} e^{2gV} \Phi + \frac{1}{16g^2} (W^{a\alpha} W_\alpha^a \delta^2(\bar{\theta}) + h.c.) \right. \\ & \left. + (W \delta^2(\bar{\theta}) + h.c.) \right). \end{aligned} \quad (167)$$

Dabei ist das Superpotential W ein Polynom dritten Grades in den chiralen Superfeldern:

$$W(\Phi) = c_i \Phi_i + \frac{m_{ij}}{2} \Phi_i \Phi_j + \frac{g_{ijk}}{3!} \Phi_i \Phi_j \Phi_k. \quad (168)$$

Die Kopplungen m_{ij}, g_{ijk} seien total symmetrisch.

Weitere Terme kann es in der Lagrangedichte nicht geben wegen Eichinvarianz und da höhere Potenzen von Φ zu nichtrenormierbaren Termen (i.e. Termen mit Dimension > 4) führen würden.

Nun eliminieren wir die Hilfsfelder D^a und F_i . Die Lagrangefunktion enthält keine kinetischen Terme für die Hilfsfelder, so daß die entsprechenden kanonischen Impulse identisch verschwinden. Dies und die Bewegungsgleichungen für die Hilfsfelder bilden Einschränkungen zweiter Klasse zwischen den kanonischen Variablen.

Nach [13], Anhang 7A, ist das naive Vorgehen richtig, die Lösungen der Hilfsfeldgleichungen in die Lagrangefunktion einzusetzen und die Hilfsfelder dadurch zu eliminieren. Die Summe aller Terme, die D^a enthalten, ist:

$$\mathcal{L}_D = \frac{1}{2} D^a D^a + A^\dagger g T^a D^a A. \quad (169)$$

Also ist die Lösung der Bewegungsgleichung für D^a durch $D^a = -A^\dagger g T^a A$ gegeben. Setzen wir diese Gleichungen in die Lagrangedichte ein, ist

$$\mathcal{L}_D = -\frac{1}{2} (A^\dagger g T^a A)^2. \quad (170)$$

Die Summe aller Terme, die F_i, F_i^\dagger enthalten, ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= F_i^\dagger F_i + \left(c_i F_i + m_{ij} F_i A_j + \frac{g_{ijk}}{2} F_i A_j A_k + h.c. \right) \\ &= F_i^\dagger F_i + \left(\frac{\partial W(A)}{\partial A_i} F_i + h.c. \right). \end{aligned} \quad (171)$$

Die Lösungen der Feldgleichungen sind $F_i^\dagger = -\frac{\partial W(A)}{\partial A_i}$. Damit ist

$$\mathcal{L}_F = - \left| \frac{\partial W(A)}{\partial A_i} \right|^2. \quad (172)$$

Nachdem $\mathcal{L}_D + \mathcal{L}_F$ alle Hilfsfeldterme enthalten, geben wir nun alle übrigen Terme an. Wir verwenden die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + i g T^a v_\mu^a, \quad (173)$$

in die bei Anwendung auf die Gauginos λ^a die adjungierte Darstellung eingesetzt werden muß.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{min.Koppl.}} &= (D^\mu A)^\dagger (D_\mu A) + \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu i D_\mu \psi \\ &\quad - \sqrt{2} g (i \bar{\psi} \bar{\lambda} A - A^\dagger i \lambda \psi) \end{aligned} \quad (174)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Superpot.}} &= -\frac{m_{ij}}{2} \psi_i \psi_j - \frac{g_{ijk}}{2} \psi_i \psi_j A_k + h.c. \\ &= -\frac{1}{2} \psi_i \psi_j \frac{\partial^2 W(A)}{\partial A_i \partial A_j} + h.c. \end{aligned} \quad (175)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Eichfelder}} &= -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 \\ &\quad + \frac{i}{2} \bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \lambda)^a + \frac{i}{2} \lambda^a \sigma^\mu (D_\mu \bar{\lambda})^a. \end{aligned} \quad (176)$$

Nach Elimination der Hilfsfelder ist die Lagrangedichte dieses Modells also

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{min.Koppl.}} + \mathcal{L}_{\text{Eichfelder}} + \mathcal{L}_{\text{Superpot.}} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_F. \quad (177)$$

Die Lagrangedichte enthält die Weylfermionen $\psi_{i\alpha}$ und komplexen Skalarfelder A_i , die Vektorfelder v_μ^a und Gauginos λ_α^a . Die Wechselwirkungen aller Felder (auch der Gauginos und Vektorfelder) mit den Vektorfeldern sind bereits eindeutig durch Eichinvarianz bestimmt. Die Supersymmetrie bestimmt zusätzlich die Wechselwirkungen der Gauginos mit den $\psi_{i\alpha}$ und A_i , die 4-Skalar-Wechselwirkungen in $\mathcal{L}_D + \mathcal{L}_F$ (die sogenannten D - und F -Terme) und Relationen zwischen den einzelnen Superpotentialtermen.

Einfache Supersymmetrische Modelle und Feynmanregeln

Die allgemeine supersymmetrische und renormierbare Lagrangedichte wurde in Gl. (177) angegeben. Nun werden wir diese Lagrangedichte auf einige wichtige Modelle konkretisieren. Diese Modelle sind noch nicht realistisch, da keine Supersymmetriebrechung berücksichtigt wird, aber sie bilden wichtige und einfach verständliche Bausteine realistischer Modelle. Danach werden mit Mischungen und Flipregeln einige typische Phänomene besprochen, die bei der praktischen Berechnung von Feynmandiagrammen in supersymmetrischen Modellen auftreten.

5 Supersymmetrische QED

Die supersymmetrische Erweiterung der QED (SQED) ist ein sehr wichtiger Prototyp einer supersymmetrischen Eichtheorie. Die SQED enthält Elektron und Photon und deren Superpartner. Sie enthält zwei chirale Superfelder Φ_L , Φ_R mit elektrischen Ladungen $Q_L = -1$, $Q_R = +1$, und einem Vektorsuperfeld V . Die eichinvariante, supersymmetrische und renormierbare Lagrangedichte ist gemäß Gl. (177) durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SQED}} = \int d^4\theta \left\{ \bar{\Phi}_L e^{2eQ_L V} \Phi_L + \bar{\Phi}_R e^{2eQ_R V} \Phi_R \right. \\ \left. + \left[\left(W + \frac{1}{16e^2} W^\alpha W_\alpha \right) \delta^2(\bar{\theta}) + h.c. \right] \right\} \end{aligned} \quad (178)$$

gegeben, wobei das einzig mit Symmetrien und Renormierbarkeit kompatible Superpotential

$$W = m\Phi_L\Phi_R \quad (179)$$

ist.

Die skalaren und 2-Spinorkomponenten der Superfelder Φ_L und Φ_R bezeichnen wir als $(\tilde{e}_L, \psi_{L\alpha})$ und $(\tilde{e}_R^\dagger, \psi_{R\alpha})$. Der 4-Spinor für das Elektron kann durch $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{L\alpha} \\ \tilde{\psi}_R^\alpha \end{pmatrix}$ definiert werden. Man kann über die Bezeichnungen der Komponenten von Φ_R streiten — eine ideale Bezeichnung gibt es nicht.³ Mit der hier gewählten Bezeichnung enthält das antichirale Superfeld $\bar{\Phi}_R$ die Komponenten \tilde{e}_R , das “rechtshändige” Selekttron, und $\tilde{\psi}_R^\alpha$, das rechtshändige Elektron. Bezeichnungsunabhängig wichtig und durch die Supersymmetrie bedingt ist, daß der Elektron-4-Spinor aus Komponenten eines chiralen und eines antichiralen Superfeldes besteht.

³Würde man $(\tilde{e}_R, \psi_{R\alpha})$ wählen, hätte \tilde{e}_R eine andere elektrische Ladung als \tilde{e}_L und damit die Interpretation eines Spositrons, nicht eines Selektrons; manchmal wird auch $(\tilde{e}_R^c, \psi_{R\alpha})$ oder $(\tilde{e}_R^c, \psi_{L\alpha}^c)$ gewählt, was auch nicht einfacher ist.

Definieren wir die Elektronladung $Q_e = Q_L = -Q_R$, dann haben die Felder \tilde{e}_L , \tilde{e}_R , Ψ , also die Selektoren und das Elektron, die Ladung Q_e .

Die Komponenten des Vektorsuperfeldes V nennen wir (λ, A_μ) und den Majoranaspinor für das Photino definieren wir als $\tilde{\gamma} := \begin{pmatrix} -i\lambda_\alpha \\ i\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$. Er erfüllt also $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}^C$.

In Komponentenfeldern wird die Lagrangedichte damit zunächst zu

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{SQED}} = & |D_\mu \tilde{e}_L|^2 + |D_\mu \tilde{e}_R^\dagger|^2 + \overline{\psi}_L i \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_L + \overline{\psi}_R i \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_R \\
 & - \sqrt{2} e Q_e \left(i \overline{\psi}_L \lambda \tilde{e}_L + i \psi_R \lambda \tilde{e}_R - i \tilde{e}_L^\dagger \lambda \psi_L - i \tilde{e}_R^\dagger \lambda \psi_R \right) \\
 & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\lambda} i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda \\
 & - m (\psi_L \psi_R + \overline{\psi}_R \overline{\psi}_L) + m (F_R \tilde{e}_L + F_L \tilde{e}_R^\dagger + h.c.) + |F_L|^2 + |F_R|^2 \\
 & + D (e Q_e |\tilde{e}_L|^2 - e Q_e |\tilde{e}_R|^2) + \frac{1}{2} D^2
 \end{aligned} \tag{180}$$

mit den Lösungen der F - und D -Feldgleichungen

$$F_L^\dagger = -m \tilde{e}_R^\dagger, \tag{181}$$

$$F_R^\dagger = -m \tilde{e}_L, \tag{182}$$

$$D = - (e Q_e |\tilde{e}_L|^2 - e Q_e |\tilde{e}_R|^2). \tag{183}$$

Der Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Auf ψ_L , $\overline{\psi}_R$ (und damit auch auf Ψ), \tilde{e}_L und \tilde{e}_R angewandt ist die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + i e Q_e A_\mu, \tag{184}$$

auf \tilde{e}_R^\dagger und ψ_R angewandt ist $D_\mu = \partial_\mu + i e Q_R A_\mu$, was zu $|D_\mu \tilde{e}_R^\dagger|^2 = |D_\mu \tilde{e}_R|^2$ und $\overline{\psi}_R i \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_R = \psi_R i \sigma^\mu D_\mu \overline{\psi}_R$ führt.

In 4-Spinorschreibweise und mit eingesetzten F - und D -Feldern wird diese Lagrangedichte zu

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{SQED}} = & |D_\mu \tilde{e}_L|^2 + |D_\mu \tilde{e}_R|^2 + \overline{\Psi} i \gamma^\mu D_\mu \Psi \\
 & - \sqrt{2} e Q_e \left(\overline{\Psi} P_R \tilde{\gamma} \tilde{e}_L - \overline{\Psi} P_L \tilde{\gamma} \tilde{e}_R + \tilde{e}_L^\dagger \tilde{\gamma} P_L \Psi - \tilde{e}_R^\dagger \tilde{\gamma} P_R \Psi \right) \\
 & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \overline{\tilde{\gamma}} i \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\gamma} \\
 & - m \overline{\Psi} \Psi - m^2 (|\tilde{e}_L|^2 + |\tilde{e}_R|^2) \\
 & - \frac{1}{2} (e Q_e |\tilde{e}_L|^2 - e Q_e |\tilde{e}_R|^2)^2
 \end{aligned} \tag{185}$$

Diese Lagrangedichte beschreibt also übliche kinetische Terme inklusive kovarianter Ableitungen für die Elektron- und Selektorenfelder (1. Zeile), die Wechselwirkungen der Elektronen/Selektoren mit den Gauginos (2. Zeile), kinetische Terme für Photon und Photino (3. Zeile), Massenterme für Elektron und Selektion

$$\begin{aligned}
& A_\mu \text{ wavy line} \rightarrow \begin{cases} \text{solid line } \bar{\Psi} \\ \text{solid line } \Psi \end{cases} &= -ieQ_e \gamma_\mu \\
& A_\mu \text{ wavy line} \rightarrow \begin{cases} \text{dashed line } \tilde{e}_i^\dagger(-p') \\ \text{dashed line } \tilde{e}_j(p) \end{cases} &= -ieQ_e (p + p')_\mu \delta_{ij} \\
& A_\mu \text{ wavy line} \text{ and } A_\nu \text{ wavy line} \rightarrow \begin{cases} \text{dashed line } \tilde{e}_i^\dagger \\ \text{dashed line } \tilde{e}_j \end{cases} &= 2ie^2 Q_e^2 g_{\mu\nu} \delta_{ij} \\
& \bar{\gamma} \text{ solid line} \rightarrow \begin{cases} \text{dashed line } \tilde{e}_i^\dagger \\ \text{solid line } \Psi \end{cases} &= -i\sqrt{2}eQ_e (\delta_{iL}P_L - \delta_{iR}P_R) \\
& \tilde{\gamma} \text{ solid line} \rightarrow \begin{cases} \text{solid line } \bar{\Psi} \\ \text{dashed line } \tilde{e}_i \end{cases} &= -i\sqrt{2}eQ_e (\delta_{iL}P_R - \delta_{iR}P_L) \\
& \begin{cases} \text{dashed line } \tilde{e}_k^\dagger \\ \text{dashed line } \tilde{e}_i \end{cases} \text{ cross} \rightarrow \begin{cases} \text{dashed line } \tilde{e}_l^\dagger \\ \text{dashed line } \tilde{e}_j \end{cases} &= -ie^2 Q_i Q_j (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})
\end{aligned}$$

Figure 1: Feynmanregeln der SQED. Die Impulse p und $(-p')$ sind einlaufend, und die Selektionsindizes $i, j, k, l \in \{L, R\}$.

aus dem Superpotential (4. Zeile), und D -Terme (5. Zeile), quartische Kopplungen zwischen den Selektren. Von der Eichinvarianz und durch die übliche Normierung bereits eindeutig bestimmt sind die 1. und 3. Zeile. Die 2. und 5. Zeile sowie die Massengleichheit von Elektron und Selektren sind Konsequenzen der Supersymmetrie.

Alle Wechselwirkungsvertices der SQED sind in Abb. 1 dargestellt.

Zu beachten ist insbesondere die unterschiedlichen Vorzeichen der Gauginokopplungen an \tilde{e}_L und \tilde{e}_R . Die Vorzeichen sind durch die Ladungen $Q_{L,R}$ der entsprechenden chiralen Superfelder bestimmt und nicht direkt durch die Ladungen von \tilde{e}_L (Komponente von Φ_L) und \tilde{e}_R (Komponente des antichiralen Feldes $\overline{\Phi}_R$).

6 Supersymmetrische QCD

Die supersymmetrische QCD (SQCD) lässt sich analog zur SQED sehr einfach definieren. Wir werden hier die Lagrangedichte der SQCD und die Feynmanregeln herleiten. Ohne Supersymmetriebrechung ist die SQCD nicht realistisch, aber wesentliche Eigenschaften, insbesondere die hier hergeleiteten Feynmanregeln, gelten auch in Gegenwart von Supersymmetriebrechung unverändert und sind Bestandteile des MSSM. Auch aus theoretischer Sicht ist die SQCD sehr interessant. Sie ist wie die gewöhnliche QCD physikalisch sehr reichhaltig, und aber nichtstörungstheoretische Phänomene lassen sich wegen der erhöhten Symmetrie einfacher studieren als in der QCD.

Die SQCD wird in einer etwas verallgemeinerten Form betrachtet mit N_c Farben und einer Quarksorte. Die SQCD ist also eine SUSY Eichtheorie mit der Eichgruppe $SU(N_c)$. Das Quark und die zugehörigen Squarks werden durch zwei chirale Superfelder L_i, R_i mit Farbindizes $i \in \{1, \dots, N_c\}$ beschrieben, analog zu Φ_L, Φ_R in der SQED. Die Komponenten von L und R bezeichnen wir mit $(\tilde{q}_L, \psi_{L\alpha})$ und $(\tilde{q}_R^\dagger, \psi_{R\alpha})$, wobei Farbindizes unterdrückt sind. Der Quark-4-Spinor lässt sich damit durch $q = \begin{pmatrix} \psi_{L\alpha} \\ \tilde{\psi}_R^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$ definieren, ebenfalls analog zur SQED.

Neben den chiralen Superfeldern enthält die SQCD noch $(N_c^2 - 1)$ Vektorsuperfelder V^a mit Komponenten (λ^a, G_μ^a) , die die Gluinos und die Gluonen beschreiben. Gluino-4-Majoranaspinoren definieren wir durch $\tilde{g}^a = \begin{pmatrix} -i\lambda_\alpha^a \\ i\bar{\lambda}^{a\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$.

Wichtig ist, nun die Darstellungen der Eichgruppe zu definieren, unter denen die Felder transformieren. Dabei soll der eigentliche Quark-4-Spinor sich wie in der gewöhnlichen QCD transformieren, also unter der fundamentalen Darstellung. Die entsprechenden Generatoren dieser Darstellung der $SU(N_c)$ seien T^a . Wir fordern also gewöhnliche Eichinvarianz unter

$$q_i \rightarrow (e^{-igT^a\theta_a})_{ij} q_j \quad (186)$$

$$\begin{aligned}
& \text{Diagram 1: } G_a^\mu(p_a) \text{ (wavy line) splits into } G_b^\nu(p_b) \text{ and } G_c^\rho(p_c) \text{ (wavy lines).} \\
& \qquad = -gf_{abc} \left[g_{\mu\nu}(p_a - p_b)_\rho + g_{\nu\rho}(p_b - p_c)_\mu + g_{\rho\mu}(p_c - p_a)_\nu \right] \\
& \text{Diagram 2: } G_a^\mu \text{ and } G_b^\nu \text{ (wavy lines) meet at a central point, splitting into } G_e^\rho \text{ and } G_f^\sigma \text{ (wavy lines).} \\
& \qquad = -ig^2 \left[f_{abc}f_{efc}(g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad + f_{aec}f_{fbc}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}) \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + f_{afc}f_{bec}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu}) \right] \\
& \text{Diagram 3: } G_a^\mu \text{ (wavy line) splits into } \bar{g}_b \text{ and } \tilde{g}_c \text{ (straight lines).} \\
& \qquad = -gf_{abc}\gamma_\mu
\end{aligned}$$

Figure 2: Feynmanregeln der SQCD: Reine SUSY-Yang-Mills Anteile (Gluonen und Gluinos). Alle Impulsargumente bezeichnen einlaufende Impulse. Farbindizes werden in der adjungierten Darstellung mit a, b, c, \dots , in der fundamentalen Darstellung mit i, j, \dots bezeichnet, und die Squarkindizes $A, B, \dots \in \{L, R\}$.

mit Transformationsparametern θ_a und Farbindizes i, j . Dies impliziert, daß auch die Weylspinoren $\psi_L, \bar{\psi}_R$ und die Squarkfelder $\tilde{q}_{L,R}$ in der fundamentalen Darstellung transformieren. Es impliziert aber auch, daß die Komponenten der “rechtshändigen” chiralen Superfelder R sich gemäß

$$\psi_{Ri} \rightarrow \left(e^{-ig(-T^{*a})\theta_a} \right)_{ij} \psi_{Rj} \quad (187)$$

transformieren müssen. Die Darstellung durch $(-T^{*a})$ nennt man antifundamentale Darstellung, die gleiche Darstellung, in der z.B. das konjugierte Quarkfeld \bar{q} transformiert. Sie ist eine Darstellung, da die Matrizen $(-T^{*a})$ wegen $T^a = T^{a\dagger}$ die gleichen Vertauschungsrelationen wie die T^a erfüllen.

Insgesamt fordern wir also, daß die SQCD eichinvariant unter den Eichtransformationen (139) ist, wobei im Falle $\Phi = L$ die fundamentale Darstellung, im Falle $\Phi = R$ die antifundamentale Darstellung für die Generatoren eingesetzt werden muss.

Die eichinvariante, supersymmetrische und renormierbare Lagrangedichte ist durch

$$\begin{aligned}
 & G_\mu \text{ (wavy line)} \rightarrow \begin{cases} \bar{q} \\ q \end{cases} & = -igT_{ij}^a \gamma_\mu \\
 & G_\mu \text{ (wavy line)} \rightarrow \begin{cases} \tilde{q}_{Ai}^\dagger(-p') \\ \tilde{q}_{Bj}(p) \end{cases} & = -ig(p+p')_\mu \delta_{AB} T_{ij}^a \\
 & G_a^\mu \text{ (wavy line)} \text{ and } G_b^\nu \text{ (wavy line)} \rightarrow \begin{cases} \tilde{q}_{Ai}^\dagger \\ \tilde{q}_{Bj} \end{cases} & = ig^2 g_{\mu\nu} \delta_{AB} \{T^a, T^b\}_{ij} \\
 & \bar{g}_a \text{ (solid line)} \rightarrow \begin{cases} \tilde{q}_{Ai}^\dagger \\ q_j \end{cases} & = -i\sqrt{2}gT_{ij}^a (P_L \delta_{AL} - P_R \delta_{AR}) \\
 & \tilde{g}_a \text{ (solid line)} \rightarrow \begin{cases} \bar{q}_i \\ \tilde{q}_{Aj} \end{cases} & = -i\sqrt{2}gT_{ij}^a (P_R \delta_{AL} - P_L \delta_{AR}) \\
 & \tilde{q}_{Ck}^\dagger \text{ (dashed line)} \text{ and } \tilde{q}_{Ai} \text{ (dashed line)} \rightarrow \begin{cases} \tilde{q}_{Dl}^\dagger \\ \tilde{q}_{Bj} \end{cases} & = -ig^2 \left[T_{ki}^a T_{lj}^a (\delta_{AL} \delta_{CL} - \delta_{AR} \delta_{CR}) (\delta_{BL} \delta_{DL} - \delta_{BR} \delta_{DR}) \right. \\
 & & \quad \left. + T_{kj}^a T_{li}^a (\delta_{BL} \delta_{CL} - \delta_{BR} \delta_{CR}) (\delta_{AL} \delta_{DL} - \delta_{AR} \delta_{DR}) \right]
 \end{aligned}$$

Figure 3: Feynmanregeln der SQCD: Materieanteile. Alle Impulsargumente bezeichnen einlaufende Impulse. Farbindices werden in der adjungierten Darstellung mit a, b, c, \dots , in der fundamentalen Darstellung mit i, j, \dots bezeichnet, und die Squarkindices $A, B, \dots \in \{L, R\}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SQCD}} = & \int d^4\theta \left\{ \bar{L} e^{2gT^a V^a} L + \bar{R} e^{2g(-T^{*a})V^a} R \right. \\ & \left. + \left[\left(W + \frac{1}{16g^2} W^{\alpha\alpha} W_\alpha \right) \delta^2(\bar{\theta}) + h.c. \right] \right\} \end{aligned} \quad (188)$$

gegeben. Ein Superpotential der Form $W = mL_i R_i$ wäre als Produkt der fundamentalen und antifundamentalen Darstellung eichinvariant. Wir werden aber der Einfachheit halber die Quarkmasse vernachlässigen und setzen daher das Superpotential $W = 0$.

Die Auswertung der Lagrangedichte in Komponentefeldern ist analog zum Fall der SQED. Ausgedrückt mit 4-Spinoren für Quark und Gluinos ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SQCD}} = & |D^\mu \tilde{q}_L|^2 + |D^\mu \tilde{q}_R|^2 + \bar{q} i \gamma^\mu D_\mu q \\ & - \sqrt{2}g \left(\bar{q} P_R \tilde{g} \tilde{q}_L - \bar{q} P_L \tilde{g} \tilde{q}_R + \tilde{q}_L^\dagger \tilde{g} P_L q - \tilde{q}_R^\dagger \tilde{g} P_R q \right) \\ & - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2} \bar{g}_a i \gamma^\mu D_\mu \tilde{g}_a - \frac{1}{2} D_a D_a, \end{aligned} \quad (189)$$

mit den Definitionen

$$D^\mu = \partial^\mu + ig T^a G_a^\mu, \quad (190)$$

$$F_a^{\mu\nu} = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu - g f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu, \quad (191)$$

$$D_a = -g(\tilde{q}_L^\dagger T^a \tilde{q}_L - \tilde{q}_R^\dagger T^a \tilde{q}_R) \quad (192)$$

wobei T^a in der kovarianten Ableitung durch $(-T^{*a})$ bzw. durch $-if_{abc}$ bei Anwendung auf Objekte in der antifundamentalen bzw. adjungierten Darstellung ersetzt werden muss. Entsprechendes gilt für $\tilde{g} = \tilde{g}^a T^a$, wobei die obige Lagrangedichte so formuliert ist, daß \tilde{g} immer nur in der fundamentalen Darstellung benötigt wird. Dies erklärt auch die unterschiedlichen Vorzeichen der Gluino-Quark-Squark-Wechselwirkungen, die analog den entsprechenden Vorzeichen in der SQED sind.

Die Feynmanregeln für die hiermit ergebenden Wechselwirkungen sind in Abb. 2, 3 dargestellt.

7 SUSY-spezifische Aspekte von Feynmanregeln

7.1 Mischungen zwischen Teilchen

In realistischen supersymmetrischen Theorien, aber auch im Standardmodell treten immer Mischungen zwischen Feldern auf, d.h. bilineare Terme in der Lagrangedichte, die unterschiedliche Felder verknüpfen. Beispiele sind die Mischung zwischen Photon und Z-Boson, die CKM-Mischung, Mischungen zwischen Gauginos und Higgsinos zu Charginos und Neutralinos, und Mischungen zwischen unterschiedlichen Sfermionen. Wir besprechen hier schematisch, wie sich die Lagrangedichte und Feynmanregeln

$$\begin{aligned}
 \phi_j^\dagger \text{ --- } \longrightarrow \text{ --- } \phi_i &= i[(p^2 - M^2)^{-1}]_{ij} \\
 X \left\{ \begin{array}{l} \diagup \\ \vdots \\ \diagdown \end{array} \right\} \text{ --- } \phi_i &= ig_i \\
 Y \left\{ \begin{array}{l} \diagup \\ \vdots \\ \diagdown \end{array} \right\} &= ig_{ij} \\
 &\quad \begin{array}{l} \text{--- } \phi_i^\dagger \\ \text{--- } \phi_j \end{array}
 \end{aligned}$$

Figure 4: Feynmanregeln für die ursprünglichen, mischenden Felder ϕ gemäß der Lagrangedichte (193).

unter solchen Mischungen verhalten. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Skalarfelder und eine Mischung mit einer unitären Matrix.

Seien ϕ_1, \dots, ϕ_n n komplexe Skalarfelder, die untereinander mischen und auch an andere Felder koppeln. Die entsprechenden Terme in der Lagrangedichte seien

$$\mathcal{L}_\phi = \phi_i^\dagger (-\partial^\mu \partial_\mu \delta_{ij} - M_{ij}^2) \phi_j + X g_i \phi_i + Y g_{ij} \phi_i^\dagger \phi_j \quad (193)$$

wobei X, Y Felder (oder Produkte von Feldern) und g Kopplungskonstanten sind. Beispiele sind die Anteile der SQED oder SQCD-Lagrangedichten mit $\phi_i = \tilde{e}_i$ bzw. $\phi_i = \tilde{q}_i$, $i \in \{L, R\}$, wenn man Massenterme für diese Felder addiert.

Entsprechende Feynmanregeln lassen sich in der üblichen Weise gewinnen. Falls die Massenmatrix M_{ij}^2 nicht diagonal ist, mischen die Felder, und Mischungspropagatoren sind ungleich Null:

$$\langle 0 | T \phi_i \phi_j^\dagger | 0 \rangle^{\text{F.T.}} = i[(p^2 - M^2)^{-1}]_{ij}. \quad (194)$$

Die Feynmanregeln für Propagatoren und Vertizes, die (193) entsprechen, sind in Abb. 4 wiedergegeben.

Die nichtdiagonalen Propagatormatrizen stellen einen Nachteil in praktischen Rechnungen dar. Dieser Nachteil läßt sich vermeiden, wenn wir zu neuen Feldern ϕ_i^M übergehen, die Masseneigenzuständen entsprechen. In den wichtigsten Fällen wird der Übergang durch eine unitäre Mischungsmatrix U vollzogen. Dann gelten die folgenden drei Gleichungen:

$$\phi_k^M = U_{ki} \phi_i \quad (195)$$

$$U_{ki}^* U_{kj} = \delta_{ij} \quad (196)$$

$$M_D^2 = U M^2 U^\dagger \quad (197)$$

$$\phi_k^{M\dagger} \text{---} \rightarrow \text{---} \phi_l = \frac{i\delta_{kl}}{p^2 - (M_D^2)_l}$$

$$X \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \text{---} \leftarrow \text{---} \phi_k = iU_{ki}^* g_i$$

$$Y \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \nearrow \text{---} \phi_k^{M\dagger} \\ \searrow \text{---} \phi_l^M \end{array} = iU_{ki} U_{lj}^* g_{ij}$$

Figure 5: Feynmanregeln für die Masseneigenzustands-Felder ϕ^M gemäß der Lagrangedichte (199).

mit einer diagonalen Massenmatrix M_D^2 . Die Rücktransformation ist

$$\phi_i = U_{ki}^* \phi_k^M, \quad (198)$$

und die Lagrangedichte wird zu

$$\mathcal{L}_\phi = \phi_i^{M\dagger} (-\partial^\mu \partial_\mu - (M_D^2)_{ii}) \phi_i^M + X g_i U_{ki}^* \phi_k^M + Y g_{ij} U_{ki} U_{lj}^* \phi_k^{M\dagger} \phi_l^M. \quad (199)$$

Die Feynmanregeln für die ϕ^M -Felder lassen sich wiederum ablesen. Da M_D diagonal ist, sind die Propagatoren nun diagonal. Die Vertizes sind aber komplizierter geworden und bestehen aus Kombinationen von Kopplungskonstanten. Die Feynmanregeln sind in Abb. 5 angegeben. Es ist nützlich, in Worten zu formulieren, wie stark die Kopplung von ϕ_k^M an X ist: U_{k1}^* mal der Kopplung von ϕ_1 an X plus U_{k2}^* mal der Kopplung von ϕ_2 an X usw. Graphisch entspricht dies

$$\left(X \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \text{---} \leftarrow \text{---} \phi_k^M \right) = U_{k1}^* \left(X \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \text{---} \leftarrow \text{---} \phi_1 \right) \\ + \dots + U_{kn}^* \left(X \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \text{---} \leftarrow \text{---} \phi_n \right)$$

Es treten hierbei also die Mischungsmatrixelemente U_{ki}^* der Rücktransformation (198) auf, die die Beiträge von ϕ_k^M in den ursprünglichen Feldern ϕ_i angeben.

So lassen sich die Selektion-, Squark- oder Chargino- und Neutralino-Feynmanregeln verstehen als Linearkombination von Feynmanregeln für Wechselwirkungseigenzustände ($\tilde{e}_{L,R}$, $\tilde{q}_{L,R}$, Gauginos, Higgsinos).

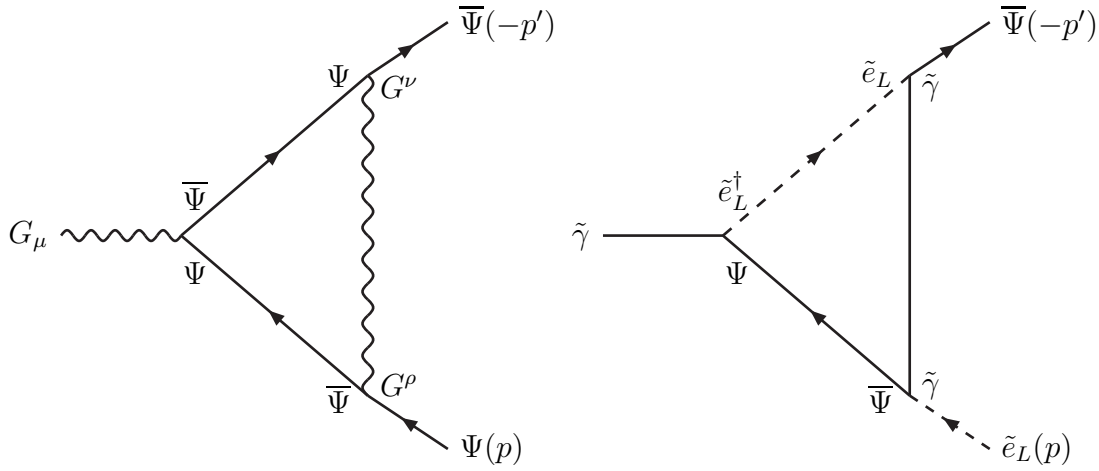


Figure 6: Zwei Feynmandiagramme der SQED. Alle Impulse sind einlaufend.

7.2 Flipregeln für Fermionen

Fig. 6 zeigt zwei 1-Schleifendiagramme der SQED. Das linke Diagramm ist die gewöhnliche Vertexkorrektur aus der QED. Seine Berechnung ist klar: die Feynmanregeln für die Spinorobjekte (Vertizes und Propagatoren) werden in der Reihenfolge entgegen der Fermionpfeilrichtung multipliziert, und das Ergebnis des Diagramms ist

$$\gamma^\nu \frac{1}{\not{p}' + \not{k} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m} \gamma^\rho \frac{-g_{\nu\rho}}{k^2}, \tag{200}$$

wobei k der Impuls des Photonpropagators ist und Vorfaktoren wie i , e , Q und das Schleifenintegral weggelassen wurden.

Das rechte Diagramm ist in gewisser Weise ein supersymmetrisches Partnerdiagramm zum linken. An jedem Vertex sind zwei Teilchen durch die entsprechenden Superpartner ersetzt. Damit ist die Struktur klar und verständlich, aber es tritt eine ungewöhnliche Situation auf: Die Fermionpfeile der beiden Elektronpropagatoren zeigen in entgegengesetzte Richtungen, und es ist unmöglich, Spinorobjekte in der Reihenfolge entgegen der Pfeilrichtung zu multiplizieren. Diagramme, die keine einheitliche Fermionpfeilrichtung zulassen, sind in supersymmetrischen Theorien häufig, kommen aber in der gewöhnlichen QED, QCD oder dem elektroschwachen Standardmodell nicht vor.

Obwohl sie im Standardmodell nicht vorkommen, ist die Existenz solcher Diagramme kein Problem, und solche Diagramme lassen sich leicht berechnen. Am einfachsten versteht man das durch Betrachten der entsprechenden Ausdrücke aus dem Zähler der Gell-Mann-Low Formel, $\langle 0|T \dots \exp(i \int \mathcal{L}_{\text{int}})|0\rangle$, und Wick-Kontraktionen, die den Diagrammen entsprechen.

Zunächst betrachten wir den entsprechenden Ausdruck für das linke, reine QED-

Diagramm. Er entspricht dem $(\mathcal{L}_{\text{int}})^3$ -Term in der Gell-Mann-Low Formel und der Kontraktion

$$\overline{\Psi}\gamma^\nu A_\nu \Psi \quad \overline{\Psi}\gamma^\mu A_\mu \Psi \quad \overline{\Psi}\gamma^\rho A_\rho \Psi. \quad (201)$$

Die Korrespondenz zu dem Ergebnis Gl. (200) ist klar. Stellen wir diesem Ausdruck nun den entsprechenden für das rechte Diagramm gegenüber,

$$\overline{\Psi}P_R\tilde{\gamma}\tilde{e}_L \quad \tilde{e}_L^\dagger\tilde{\gamma}P_L\Psi \quad \overline{\Psi}P_R\tilde{\gamma}\tilde{e}_L. \quad (202)$$

An jedem Vertex sind zwei Felder durch die entsprechenden Superpartner ersetzt. Hier wird ein weiterer Aspekt dieser ungewöhnlichen Situation offenkundig. Es ist zwar klar, in welcher Weise die Spinorausdrücke multipliziert werden müssen, aber es tritt die Kontraktion $\tilde{\gamma}\tilde{\gamma} = \langle 0|T\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}|0\rangle$ auf, und diese Kontraktion entspricht *nicht* dem üblichen Diracpropagator. Wir wüssten zum Beispiel $\langle 0|T\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}|0\rangle^{\text{F.T.}} = \frac{i}{\not{k}-m_{\tilde{\gamma}}}$, wenn $m_{\tilde{\gamma}}$ die Photinomasse (in der SQED =0) und k der von $\tilde{\gamma}$ nach $\tilde{\gamma}$ fließende Impuls ist.

Es gibt nun zwei Möglichkeiten, das rechte Diagramm zu berechnen. Entweder wir berechnen die Kontraktion $\langle 0|T\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}|0\rangle$ und benutzen das Ergebnis in Gl. (202). Oder wir schreiben \mathcal{L}_{int} so um, daß eine solche Kontraktion gar nicht erst auftaucht. Die zweite Möglichkeit führt auf einfachere und systematischere Ausdrücke, weshalb sie meist benutzt wird. Bevor wir sie genauer diskutieren, skizzieren wir die unterschiedlichen Kontraktionen kurz.

Gl. (54) verdeutlicht, daß freie Feldoperatoren $\overline{\Psi}$ und Ψ^C die gleichen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren enthalten, und entsprechend auch Ψ und $\overline{\Psi}^C$. Daher beschreiben für zwei beliebige Spinorfelder Ψ_1, Ψ_2 die Kontraktionen

$$\langle 0|T\Psi_1\overline{\Psi}_2|0\rangle, \langle 0|T\Psi_1\Psi_2^C|0\rangle, \langle 0|T\overline{\Psi}_1^C\overline{\Psi}_2|0\rangle, \langle 0|T\overline{\Psi}_1^C\Psi_2^C|0\rangle \quad (203)$$

alle die gleiche Physik, haben aber eine unterschiedliche Spinor-Indexstruktur, die sich gemäß Gl. (54) umrechnen lassen. Das bekannte Ergebnis

$$\langle 0|T\Psi\overline{\Psi}|0\rangle^{\text{F.T.}} = \frac{i}{\not{p}-m} \quad (204)$$

für ein beliebiges Spinorfeld der Masse m , wobei der Impuls p von $\overline{\Psi}$ nach Ψ fließt, kann dabei als Ausgangspunkt dienen. Da $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}^C$ ein Majoranaspinor ist, läßt sich auch $\langle 0|T\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}|0\rangle$ in $\langle 0|T\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}|0\rangle$ umrechnen.

Nun zur systematischen Berechnung des rechten Diagramms in Fig. 6 und aller anderer analoger Diagramme. Der entscheidende Punkt ist, daß jeder Term in \mathcal{L}_{int} der Form $\overline{\Psi}_1\Gamma\Psi_2X$, wobei Γ irgendeine Kombination von γ -Matrizen und X andere Felder ohne Spinorindex sind, sich in zwei äquivalenten Weisen schreiben läßt:

$$\overline{\Psi}_1\Gamma\Psi_2X = \overline{\Psi}_2^C\Gamma^C\Psi_1^CX \quad (205)$$

wobei Γ^C in Gl. (58) für die wichtigsten Fälle angegeben wurde.⁴ Es gilt

$$\{1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \gamma^\mu P_{L,R}\}^C = \{1, \gamma^5, -\gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, -\gamma^\mu P_{R,L}\}. \quad (206)$$

Die entsprechende Umschreibung von $\bar{\Psi}_1 \Gamma \Psi_2$ zu $\bar{\Psi}_2^C \Gamma^C \Psi_1^C$ bezeichnen wir als (Fermion-)Flip.

In unserem konkreten Diagramm wenden wir nun solche Flips auf den zweiten und dritten Faktor in dem Ausdruck (202) an und vertauschen die Reihenfolge der Faktoren. Wir erhalten dann die Kontraktion

$$\bar{\Psi} P_R \tilde{\gamma} \tilde{e}_L \quad \tilde{\gamma} P_R \Psi^C \tilde{e}_L \quad \tilde{e}_L^\dagger \bar{\Psi}^C P_L \tilde{\gamma}, \quad (207)$$

die also nach der bisherigen Diskussion klarerweise identisch mit (202) ist. Die beiden Kontraktionen $\Psi^C \bar{\Psi}^C$ und $\tilde{\gamma} \tilde{\gamma}$ sind durch das allgemeine Ergebnis (204) gegeben,⁵

$$\langle 0 | T \Psi^C \bar{\Psi}^C | 0 \rangle^{\text{F.T.}} = \frac{i}{\not{P} - m}, \quad \langle 0 | T \tilde{\gamma} \tilde{\gamma} | 0 \rangle^{\text{F.T.}} = \frac{i}{(-\not{k})}, \quad (208)$$

wobei $P = -p - k$ der Impuls von $\bar{\Psi}^C$ nach Ψ^C , und $(-k)$ der Impuls von $\tilde{\gamma}$ nach $\tilde{\gamma}$ ist.

Diese Kontraktion (207) hat auch eine direkte Interpretation als Feynmandiagramm, nämlich als das Diagramm aus Fig. 7. Damit ist die Berechnung des Diagramms nun einfach möglich, und das Ergebnis ist, analog zu (200),⁶

$$P_R \frac{1}{(-\not{k})} P_R \frac{1}{\not{P} - m} P_L \frac{1}{(\not{p} + \not{k})^2 - m^2}, \quad (209)$$

Zwei Punkte sind entscheidend dafür, daß die Berechnung der Kontraktion (207) bzw. des Diagramms aus Fig. 7 nun einfach möglich ist:

- Alle Kontraktionen zwischen 4-Spinoren haben die übliche, mit (204) berechenbare Form $\langle 0 | T \Psi_1 \bar{\Psi}_2 | 0 \rangle$ mit einem “ungequerten” und einem “gequerten” Spinor.

⁴N.B. dies ist *keine hermitesche Konjugation!* Beide Seiten der Gleichung beschreiben identische Physik, nur unterschiedlich aufgeschrieben. Hermitesche Konjugation verknüpft einen Wechselwirkungsterm für Felder mit dem für die entsprechenden hermitesch konjugierten Felder und damit für eine andere physikalische Situation.

⁵Insbesondere Ψ^C verhält sich genauso wie jeder andere, beliebige Diracspinor. Im Vergleich zu Ψ ist sind nur Erzeuger/Vernichter von Teilchen/Antiteilchen vertauscht, deren Unterscheidung aber ohnehin Konvention ist.

⁶Dieses Diagramm ist streng genommen gleich Null wegen $P_R \frac{1}{(-\not{k})} P_R = 0$, aber entsprechende Diagramme in Theorien mit Photinomasse oder Mischung zwischen \tilde{e}_L und \tilde{e}_R sind ungleich Null und werden mit der hier beschriebenen Methode berechnet.

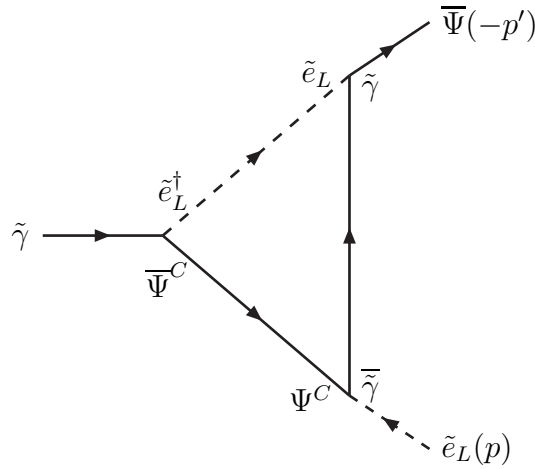


Figure 7: Äquivalente Form des zweiten Diagramms aus Fig. (6), entsprechend der Kontraktion Gl. (207).

- Alle Spinorobjekte (Propagatoren und Vertexfaktoren) werden miteinander gemäß ihrer Spinormatrixstruktur multipliziert.

Diese beiden Punkte erlauben, eine einheitliche “Fermionflußrichtung” zu definieren, die durch die Fermionpfeile auch an den $\tilde{\gamma}$ -Linien in Fig. 7 angedeutet ist. Die Berechnung des Diagramms ist dann kompatibel mit der Vorschrift, alle Spinorobjekte in der Reihenfolge entgegen der Fermionflußrichtung zu multiplizieren.

Die hier beschriebene Methode kann für alle Diagramme benutzt werden. Es ist leicht zu zeigen, daß jedes Diagramm so umgeformt werden kann, daß obige zwei Punkte erfüllt sind [2]. In der Praxis ergibt sich folgende Rechenvorschrift: Falls in einem Diagramm eine Kontraktion $\underline{\Psi}_1 \bar{\Psi}_2$ eine falsche Fermionpfeilrichtung hat, oder eine Kontraktion wie $\underline{\Psi}_1 \underline{\Psi}_2$ auftritt, werden auf die beteiligten Vertizes passende Flipregeln angewandt und die Kontraktionen durch äquivalente Ausdrücke wie $\underline{\Psi}_2^C \bar{\Psi}_1^C$ oder $\underline{\Psi}_1 \bar{\Psi}_2^C$ ersetzt. Um diesen Vorgang zu vereinfachen, können auch ein für allemal geflippte Feynmanregeln hergeleitet und zur Verfügung gestellt werden. Als Beispiel illustrieren wir dies anhand der SQED-Feynmanregeln. Die geflippten Versionen der Feynmanregeln aus Fig. 1 sind in Fig. 8 dargestellt.

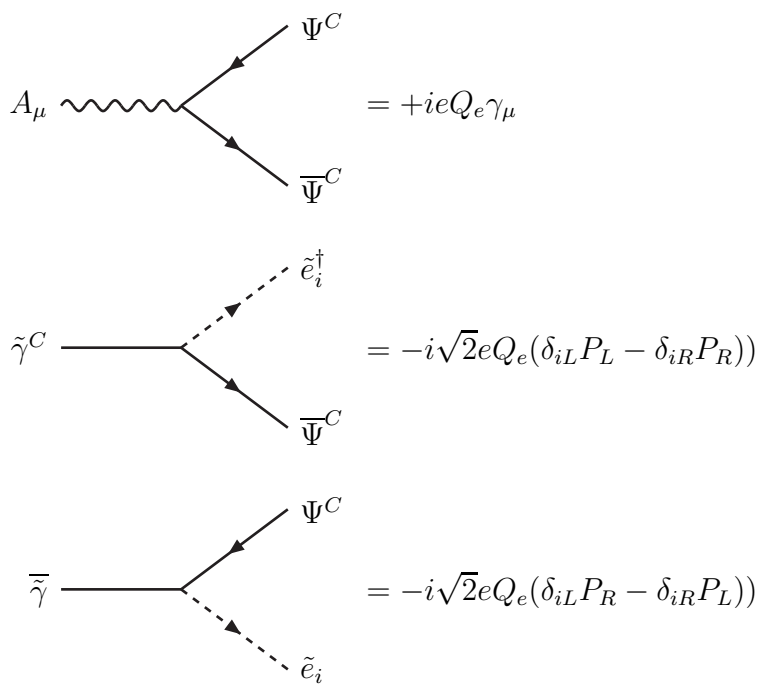


Figure 8: Geflippte Feynmanregeln der SQED, die sich aus den Flipregeln (58) ergeben. Jede dieser Regeln ist eine äquivalente Umformulierung der entsprechenden Regel aus Fig. 1 und kann je nach Bedarf als Alternative benutzt werden.

Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell

Wir definieren und besprechen nun das einfachste realistische supersymmetrische Modell, das Minimale Supersymmetrische Standardmodell (MSSM). Das Modell wird definiert durch die Angabe der Eichgruppe und damit der Vektorsuperfelder, der chiralen Superfelder und ihren Quantenzahlen bezüglich der Eichgruppe, des Superpotentials, und durch Angabe der Supersymmetrie-Brechungsterme.

Im Sinne der Minimalität setzen wir R-Paritätserhaltung voraus und betrachten Supersymmetriebrechung nur durch die Girardello-Grisaru Soft-Brechungsterme.⁷ Der einfacheren Schreibweise halber betrachten wir nur eine Generation von Materiepartikeln.

8 Definition des MSSM

8.1 Symmetrien, Felder und Lagrangedichte

Das MSSM beschreibt alle beobachteten Teilchen (Eichbosonen, Quarks und Leptonen) und zwei skalare Higgsdubletts, minimal zu Supersymmetriemultipletts ergänzt. Das MSSM ist eine Eichtheorie mit der Eichgruppe $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Die entsprechenden Felder und ihre Quantenzahlen sind in Tab. 1 angegeben.

Die MSSM-Lagrangedichte ist durch einen supersymmetrischen und einen nicht-supersymmetrischen Anteil gegeben,

$$\mathcal{L}_{\text{MSSM}} = \mathcal{L}_{\text{susy}} + \mathcal{L}_{\text{soft}} \quad (210)$$

wobei der supersymmetrische Anteil gemäß der allgemeinen Überlegungen durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{susy}} = & \int d^4\theta \left\{ \overline{Q} e^{2gV+2g'V'+2g_s V_s} Q + \overline{U} e^{2gV+2g'V'-2g_s V_s^T} U + \overline{D} e^{2gV+2g'V'-2g_s V_s^T} D \right. \\ & + \overline{L} e^{2gV+2g'V'} L + \overline{E} e^{2gV+2g'V'} E \\ & \left. + \overline{H}_d e^{2gV+2g'V'} H_d + \overline{H}_u e^{2gV+2g'V'} H_u \right\} \\ & + \int d^2\theta \left[\frac{1}{16g^2} W^{a\alpha} W_\alpha^a + \frac{1}{16g'^2} W'^{\alpha} W'_\alpha + \frac{1}{16g_s^2} W_s^{a\alpha} W_{s\alpha}^a \right] + h.c. \\ & + \int d^2\theta W_{\text{MSSM}} + h.c. \end{aligned} \quad (211)$$

gegeben ist. Hierbei wurden die Kombinationen von Eichfeldern und Generatoren $V_s = V_s^a \frac{\lambda^a}{2}$, $V = V^a \frac{\sigma^a}{2}$ und $V' = v' Y$ verwendet. Die Terme der ersten vier Zeilen

⁷Es könnte auch Nicht-Standard-Softbrechungsterme geben, s. z.B. [15, 17].

| Superfeld | Komponenten | $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ |
|-----------|--|--|
| Φ | A, ψ | |
| V | λ, v_μ | |
| Q | $\tilde{q}_L = \begin{pmatrix} u_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}, q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$ | $(3, 2, 1/6)$ |
| U | \tilde{u}_R^\dagger, u_R | $(3^*, 1, -2/3)$ |
| D | \tilde{d}_R^\dagger, d_R | $(3^*, 1, 1/3)$ |
| L | $\tilde{l}_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}, l_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$ | $(1, 2, -1/2)$ |
| E | \tilde{e}_R^\dagger, e_R | $(1, 1, 1)$ |
| H_d | H_d, ψ_{H_d} | $(1, 2, -1/2)$ |
| H_u | H_u, ψ_{H_u} | $(1, 2, 1/2)$ |
| v' | λ', B_μ | $(1, 1, 0)$ |
| V^a | λ^a, W_μ^a | $(1, 3, 0)$ |
| V_s^a | λ_s^a, G_μ^a | $(8, 1, 0)$ |

Table 1: Die Superfelder des MSSM, ihre Komponenten und Ladungen. In den beiden ersten Zeilen sind zum Vergleich die allgemeinen Bezeichnungen aus Gl. (133), (138) angegeben. Wie dort geben wir hier die auftretenden 2-Spinoren an. Wir treffen keine Unterscheidung in der Bezeichnung der Higgssuperfelder und Higgsskalare. Die für Eichtransformationen oder kovariante Ableitungen einzusetzenden $SU(3)_C$ -Generatoren sind: 3-Darstellung: $T_s^a = \frac{\lambda^a}{2}$, 3*-Darstellung: $T_s^a = -\frac{\lambda^{*a}}{2} = -\frac{\lambda^{aT}}{2}$ mit den Gell-Mann Matrizen λ^a ($a = 1 \dots 8$). Die $SU(2)_L$ -Generatoren sind: 2-Darstellung: $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$ mit den Pauli-Matrizen σ^a ($a = 1, 2, 3$). Die adjungierten Darstellungen (Oktett für $SU(3)_C$ und Tripletts für $SU(2)_L$) sind generell durch $(T^{\text{ad}})^a_{bc} = -if_{abc}$ mit den entsprechenden Strukturkonstanten gegeben.

beschreiben die kinetischen Terme der Materie-, Eich- und Gauginofelder sowie alle Wechselwirkungen mit Eichfeldern und Gauginos. Das Superpotential des MSSM ist definiert durch⁸

$$W_{\text{MSSM}} = y_d H_d Q D + y_u H_u Q U + y_e H_d L E - \mu H_d H_u. \quad (212)$$

Dies ist das einzig mögliche eichinvariante und renormierbare Superpotential, das keine R-Paritätsverletzung enthält. Die Summe über $SU(2)_L$ -Indizes ist hierbei eichinvariant als $H_d Q = H_d^1 Q^2 - H_d^2 Q^1 = \epsilon_{ij} H_d^i Q^j$ etc. definiert, wohingegen zum Beispiel $|H_d|^2 = H_d^\dagger H_d = H_d^{\dagger i} H_d^i$ ist. Das Superpotential enthält supersymmetrisierte Yukawakopplungen der SM-Fermionen an Higgsbosonen und den μ -Term, einen bilinearen Term, der einen Übergang von H_u zu H_d beschreibt.

Neben den Eichkopplungen g_s, g, g' und den Yukawakopplungen $y_{d,u,e}$ enthält $\mathcal{L}_{\text{susy}}$ nur noch den freien Parameter μ , einen Massenparameter. Damit enthält $\mathcal{L}_{\text{susy}}$ einen Parameter weniger als das Standardmodell.

Die Lagrangedichte der Softbrechung hat die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{soft}} = & -M_Q^2 |\tilde{q}_L|^2 - M_{\tilde{U}}^2 |\tilde{u}_R|^2 - M_D^2 |\tilde{d}_R|^2 - M_L^2 |\tilde{l}_L|^2 \\ & - M_E^2 |\tilde{e}_R|^2 - M_{H_d}^2 |H_d|^2 - M_{H_u}^2 |H_u|^2 \\ & + \frac{1}{2} (M_1 \lambda' \lambda' + M_2 \lambda^a \lambda^a + M_3 \lambda_s^a \lambda_s^a + h.c.) \\ & - \left(A_d y_d H_d \tilde{q}_L \tilde{d}_R^\dagger + A_u y_u H_u \tilde{q}_L \tilde{u}_R^\dagger + A_e y_e H_d \tilde{l}_L \tilde{e}_R^\dagger - B \mu H_d H_u + h.c. \right) \end{aligned} \quad (213)$$

Sie beschreibt Massenterme für alle Skalarfelder und Gauginos, sowie einen Brechungsterm für jeden Superpotentialterm, die sogenannten A - und $B\mu$ -Terme.

8.2 Bemerkungen zu komplexen Parametern und physikalischen Phasen

Die Struktur des MSSM erlaubt, daß folgende Parameter komplexe Werte annehmen: die Yukawakopplungen $y_{d,u,e}$, der Higgsparameter μ , die Softparameter ($B\mu$), $M_{1,2,3}$ und die A Parameter $A_{d,u,e}$. Aber nicht alle Kombinationen dieser Phasen führen zu unterschiedlichen physikalischen Ergebnissen, weil zwei davon durch Umdefinitionen der Felder absorbiert werden können.

Es ist theoretisch und phänomenologisch interessant, Symmetrietransformationen des MSSM zu studieren, unter denen nicht nur Felder, sondern auch Parameter Phasentransformationen unterzogen werden.

In Tab. 2 sind sechs solcher Symmetrien angegeben. Es werden jeweils die Ladungen n_i spezifiziert, mit denen die Lagrangedichte unter der Multiplikation der

⁸Man beachte das willkürlich gewählte Vorzeichen des μ -Terms. Diese Konvention entspricht der üblichen Haber/Kane-Konvention von μ .

einzelnen Größen mit $e^{i\alpha n_i}$ invariant ist. Die ersten drei Transformationen sind sogenannte chirale Symmetrietransformationen, bei denen links- und rechtshändige Fermionen (jeweils getrennt für alle Fermionen) unterschiedlich transformieren. Das MSSM wäre unter diesen Transformationen invariant, falls die entsprechenden Yukawakopplungen Null wären. Sind die Yukawakopplungen nicht Null, stellt diese Symmetrie der MSSM-Lagrangedichte eine Relation her zwischen unterschiedlichen Parameterwahlen im MSSM. Für eine beliebige MSSM-Observable $\sigma(y_f)$, die von der Yukawakopplung y_f abhängt, muß $\sigma(y_f) = \sigma(e^{i\alpha} y_f)$ gelten. Alle Observablen hängen daher nur von $|y_f|$ ab, nicht von der komplexen Phase.⁹

Für die Phänomenologie ist es sehr wichtig zu bemerken, daß es Observablen gibt, die im Limes exakter chiraler Symmetrie ($y_f \rightarrow 0$) verschwinden. MSSM-Vorhersagen für solche Observablen sind daher immer proportional zu den entsprechenden Yukawakopplungen. Beispiele sind das anomale magnetische Moment des Myons oder der Prozess $b \rightarrow s\gamma$.

Die erste Transformation der zweiten Tabelle entspricht der Peccei-Quinn-Symmetrie. Es ist eine chirale Transformation, bei der beide Higgsfelder mit derselben Ladung transformieren und die bei fehlender Kopplung der beiden Higgsdubletts eine Symmetrie des MSSM darstellt. Es gilt das gleiche Argument wie oben: alle Observablen, die im Limes exakter Peccei-Quinn-Symmetrie verschwinden würden, sind im MSSM proportional zu μ , da dies der einzige MSSM-Parameter ist, der diese Symmetrie bricht.

Die Transformation R_2 ist eine sogenannte R-Transformation, bei der auch die θ -Variablen, die in den chiralen und Vektorsuperfeldern als Argumente auftauchen, transformiert werden. Die beiden Transformationen PQ , R_2 und alternativ die Hintereinanderausführung $R_1 = PQ \circ R_2$ sind für die Elimination komplexer Phasen günstig, da sie jeweils verschiedene Soft-Parameter invariant lassen.

Da $\mathcal{L}_{\text{MSSM}}$ unter diesen Transformationen invariant ist, sind auch alle physikalischen Vorhersagen invariant. Haben die Parameter¹⁰ M , A , $B\mu$ und μ zunächst die Phasen φ_M , φ_A , $\varphi_{B\mu}$ und φ_μ , dann wenden wir zunächst die Transformation R_2 mit dem Winkel φ_M , dann die Transformation PQ mit dem Winkel $\varphi_{B\mu}$ an und erhalten für eine beliebige Observable:

$$\begin{aligned} & \sigma(|\mu|, |A|, |M|, |B\mu|, \varphi_\mu, \varphi_A, \varphi_M, \varphi_{B\mu}) \\ = & \sigma(|\mu|, |A|, |M|, |B\mu|, \varphi_\mu + \varphi_M, \varphi_A - \varphi_M, 0, \varphi_{B\mu}) \\ = & \sigma(|\mu|, |A|, |M|, |B\mu|, \varphi_\mu + \varphi_M - \varphi_{B\mu}, \varphi_A - \varphi_M, 0, 0). \end{aligned} \quad (214)$$

Damit gilt einerseits: Das MSSM hängt nur von den Beträgen aller Parameter und den Kombinationen

$$\mu A (B\mu)^*, \quad AM^* \quad (215)$$

⁹Diese Überlegungen ändern sich mit mehr als einer Generation. Bei mehr als zwei Generationen ist es nicht mehr möglich, alle komplexen Phasen wegzutransformieren. Dies ist der Mechanismus der CP-Verletzung von Kobayashi und Maskawa.

¹⁰Der Einfachheit halber unterscheiden wir hier nicht zwischen den einzelnen Gauginomassen $M_{1,2,3}$ und den einzelnen A -Parametern $A_{u,d,e}$.

| | χ_U | χ_D | χ_E |
|-------|----------|----------|----------|
| y_u | 1 | 0 | 0 |
| y_d | 0 | 1 | 0 |
| y_e | 0 | 0 | 1 |
| U | -1 | 0 | 0 |
| D | 0 | -1 | 0 |
| E | 0 | 0 | -1 |

| | PQ | R_1 | R_2 |
|----------|------|-------|-------|
| M | 0 | -1 | -1 |
| A | 0 | -1 | -1 |
| $B\mu$ | -1 | -1 | 0 |
| μ | -1 | 0 | 1 |
| H_d | 1/2 | 1/2 | 0 |
| H_u | 1/2 | 1/2 | 0 |
| QU | -1/2 | 1/2 | 1 |
| QD | -1/2 | 1/2 | 1 |
| LE | -1/2 | 1/2 | 1 |
| θ | 0 | -1/2 | -1/2 |

Table 2: Die Ladungen n_i für sechs U(1)-Transformationen, unter denen das MSSM invariant ist. Die jeweils nicht aufgeführten Parameter und Felder transformieren nicht.

ab. Andererseits kann jede Parameterwahl durch eine äquivalente ersetzt werden, bei der z.B. $(B\mu)$ und eine Gauginomasse M_2 reell sind.

9 Spontane Symmetriebrechung, Mischungen und Masseneigenzustände

In diesem Abschnitt besprechen wir die spontane elektroschwache Symmetriebrechung und die daraus resultierenden Massenterme für alle Felder in der Lagrangedichte. Werden diese Massenterme diagonalisiert, können die Masseneigenzustände und -Eigenwerte auf der Ebene der Lagrangedichte (entsprechend der tree-level Approximation) berechnet werden. Die Masseneigenzustände entsprechen physikalischen Teilchen, die Masseneigenwerte den entsprechenden physikalischen Massen (Polstellen der Propagatoren). Die Diagonalisierungsmatrizen tauchen in den Feynmanregeln auf wie in Abschnitt 7.1 besprochen.

9.1 Spontane Brechung der elektroschwachen Eichinvarianz

Um die Massen der W - und Z -Bosonen zu beschreiben, muss die elektroschwache Eichinvarianz spontan gebrochen sein. Dazu müssen die Higgs-Skalarfelder einen Vakuumerwartungswert entwickeln.¹¹ Dies ist möglich. Das Higgspotential des

¹¹Prinzipiell müssen irgendwelche Skalarfelder, die an W und Z koppeln, einen Vakuumerwartungswert entwickeln. Im MSSM gibt es nicht nur die Higgs-Skalarfelder, sondern auch Sfermionen. Falls letztere aber einen Vakuumerwartungswert hätten, wäre nicht nur die elektroschwache Eichinvarianz spontan gebrochen, sondern auch die $SU(3)_C$ (im Falle von Squark-Vakuumerwartungswerten), oder Leptonzahlerhaltung. Beides ist phänomenologisch ausgeschlossen.

MSSM, also der Anteil der Lagrangedichte, der nur Higgsfelder enthält, hat die Form $\mathcal{L}_H = \mathcal{L}_{\text{Higgspot.}}^D + \mathcal{L}_{\text{Higgspot.}}^F + \mathcal{L}_{\text{Higgspot.}}^{\text{soft}}$ mit

$$\mathcal{L}_{\text{Higgspot.}}^D = -\frac{g^2}{2} \left(H_d^\dagger T^a H_d + H_u^\dagger T^a H_u \right)^2 - \frac{g'^2}{2} \left(Y_{H_d} H_d^\dagger H_d + Y_{H_u} H_u^\dagger H_u \right)^2 \quad (216a)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Higgspot.}}^F = -|\mu|^2 \left(H_d^\dagger H_d + H_u^\dagger H_u \right), \quad (216b)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Higgspot.}}^{\text{soft}} = - \left(M_{H_d}^2 H_d^\dagger H_d + M_{H_u}^2 H_u^\dagger H_u + (B\mu H_d H_u + h.c.) \right). \quad (216c)$$

Welche Minima das Higgspotential hat, hängt von den Werten der auftretenden Parameter ab. Wir nehmen im Folgenden an, daß die Minima durch

$$H_d = \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_u = \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} \quad (217)$$

gegeben sind. Die einzige Linearkombination von $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Generatoren, die diesen Vakuumzustand auf Null abbildet und damit seine kleine Gruppe generiert, ist die elektrische Ladung

$$Q = T^3 + Y. \quad (218)$$

Ein wichtiger, zentraler MSSM-Parameter, der sich hierdurch ergibt, ist die Größe $\tan \beta$,

$$\tan \beta = \frac{v_u}{v_d}. \quad (219)$$

Wegen der Vakuumerwartungswerte (217) ist die folgende Parametrisierung der Higgsfelder nützlich:

$$H_d = \begin{pmatrix} v_d + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_d^0 - i\chi_d^0) \\ -\phi_d^- \end{pmatrix}, \quad H_u = \begin{pmatrix} \phi_u^+ \\ v_u + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_u^0 + i\chi_u^0) \end{pmatrix}. \quad (220)$$

Hierbei sind $\phi_{u,d}^0, \chi_{u,d}^0$ reelle Skalarfelder und $\phi_{u,d}^\pm = (\phi_{u,d}^\mp)^\dagger$ komplexe Skalarfelder. Im Vakuum gilt damit $\phi_i^{0,\pm} = \chi_i^0 = 0$ für $i \in \{u, d\}$.

9.2 Massen und Mischungen der Eichbosonen

Aus den vier elektroschwachen Eichbosonen W_μ^a, B_μ werden die elektrisch geladenen W_μ^\pm und die elektrisch neutralen Photon A_μ und Z_μ definiert gemäß

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (221)$$

$$\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ W^3 \end{pmatrix} \quad (222)$$

mit dem schwachen Mischungswinkel $c_W = \cos \theta_W, s_W = \sin \theta_W$. Damit und mit den Kombinationen $T^\pm = T^1 \pm iT^2$ läßt sich die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + igT^a W_\mu^a + ig'Y B_\mu. \quad (223)$$

zu

$$D_\mu = \partial_\mu + ieQA_\mu + i\frac{e}{s_W c_W}(T^3 - Q \sin^2 \theta_W)Z_\mu + i\frac{e}{\sqrt{2}s_W}(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-) \quad (224)$$

umformen. An dieser Darstellung lassen sich direkt die Kopplungen aller Eichbosonen an alle anderen Felder ablesen.

Aus den kinetischen Termen der Higgsfelder ergeben sich dann die Eichbosonmassenterme, wenn man den Vakuumzustand $\phi_i^{0,\pm} = \chi_i^0 = 0$ einsetzt. Für das Dublett H_d ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{min.Koppl.H}_d} &= |D_\mu H_d|^2 \\ &= \left| \partial_\mu H_d + i \left(g_Z T_Z Z_\mu + \frac{g}{\sqrt{2}} W^- T^- \right) \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\phi_d^{0,-}, \chi_d^0) \right|^2 \\ &= \left| ig_Z T_Z Z_\mu v_d \right|^2 + \left| i \frac{g}{\sqrt{2}} W^- v_d \right|^2 + \mathcal{O}(\phi_d^{0,-}, \chi_d^0). \end{aligned} \quad (225)$$

Zusammen mit den analogen Termen für H_u ergibt sich der Eichbosonmassenterm

$$\mathcal{L}_m^{\text{min.Koppl.H}_{d,u}} = \frac{M_Z^2}{2} Z_\mu Z^\mu + M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} \quad (226)$$

also Massenterme für Z und W , aber nicht für das Photon, mit den Massen

$$M_Z^2 = \frac{g^2}{2c_W^2}(v_d^2 + v_u^2) \quad (227)$$

$$M_W^2 = \frac{g^2}{2}(v_d^2 + v_u^2). \quad (228)$$

9.3 Massen und Mischungen der Higgsbosonen

Die beiden Higgsdubletts enthalten insgesamt acht reelle Freiheitsgrade, von denen drei wegen der spontanen Symmetriebrechung zu unphysikalischen (would-be) Goldstonebosonen werden. Ob und wie diese Goldstonebosonen in der Theorie auftauchen, und wie sie von den longitudinalen Freiheitsgraden der Eichbosonen absorbiert werden, hängt von der Wahl der Eichfixierung ab. Diese wird hier aber nicht diskutiert. Wir besprechen nur den physikalischen Anteil der Lagrangedichte, der nicht aus der Eichfixierung stammt.¹²

Der physikalische Anteil der Massenterme für die Higgsbosonen stammt aus dem Higgspotential des MSSM, das aus D -Termen, F -Termen und Softbrechungstermen gebildet wird, s. Gl. (216). Nur die D -Terme tragen zu den quartischen Termen des Higgspotentials bei. Dies ist wichtig, da die D -Terme keine freien Parameter

¹²Üblich und zweckmäßig ist, die Eichfixierung analog zum Standardmodell als R_ξ -Eichung durchzuführen, in der die Goldstonebosonen eine Masse bekommen, die gleich der Masse der unphysikalischen Freiheitsgrade der Eichbosonen und der Faddeev-Popov Geister ist.

enthalten und somit die quartischen Terme des MSSM-Higgspotentials eindeutig bekannt, und proportional zu Eichkopplungen, sind.

Das MSSM-Higgspotential führt auf Massenmatrizen für die in Gl. (220) definierten Felder $\phi_i^{0,\pm}$, χ_i . Es ist nützlich, im Higgspotential die ursprünglich vorhandenen Parameter $M_{H_d}^2$, $M_{H_u}^2$ durch M_Z , $\tan\beta$ zu ersetzen.

Nach einiger Rechnung ergibt sich dann, daß der bilineare Anteil des Higgspotentials folgendermaßen in Diagonalform geschrieben werden kann:

$$\mathcal{L}_{m,\text{Higgs}} = -\frac{1}{2} (M_h^2 (h^0)^2 + M_H^2 (H^0)^2 + M_A^2 (A^0)^2) - M_{H^\pm}^2 H^+ H^- \quad (229)$$

mit den Masseneigenzustandsfeldern

$$\begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_d^0 \\ \phi_u^0 \end{pmatrix}, \quad (230)$$

$$\begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_d^0 \\ \chi_u^0 \end{pmatrix}, \quad (231)$$

$$\begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_d^\pm \\ \phi_u^\pm \end{pmatrix}, \quad (232)$$

dem Mischungswinkel α , der durch

$$\tan 2\alpha = \tan 2\beta \frac{M_A^2 + M_Z^2}{M_A^2 - M_Z^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0. \quad (233)$$

gegeben ist, und den Massen

$$M_{H^\pm}^2 = M_A^2 + M_W^2, \quad (234)$$

$$M_{H,h}^2 = \frac{1}{2} \left[M_A^2 + M_Z^2 \pm \sqrt{(M_A^2 + M_Z^2)^2 - 4M_Z^2 M_A^2 c_{2\beta}^2} \right], \quad (235)$$

$$M_A^2 = \frac{2B\mu}{\sin 2\beta}. \quad (236)$$

Das heißt, die oben definierten Felder $\phi_{1,2}^0$ mischen zu Masseneigenzuständen H^0, h^0 , zwei physikalischen, (im Limes von CP-Erhaltung) CP-geraden, Higgsskalaren. Die CP-ungeraden Felder $\chi_{1,2}$ mischen zu einem Masseneigenzustand A^0 und einem unphysikalischen Goldstoneboson G^0 , das keine Massenterme aus dem physikalischen Higgspotential bekommt (aber in R_ξ -Eichung aus der Eichfixierung). Die Felder $\phi_{1,2}^\pm$ mischen zu zwei geladenen Higgsskalaren H^\pm und zwei geladenen Goldstonebosonen G^\pm .

Der Mischungswinkel für die geladenen und CP-ungeraden Felder ist der durch $\tan\beta$ bestimmte Winkel β , der Mischungswinkel α für die CP-geraden Felder ist eine Funktion davon.

Es ist wichtig zu bemerken, daß die Masse des leichtesten Higgssbosons h leichter als die Z -Masse ist. Dies einerseits eine sehr wichtige Vorhersage des MSSM, die von den eindeutig bestimmten quartischen Termen des Higgspotentials stammt. Andererseits ist $M_h < M_Z$ ein Artefakt der Rechnung in niedriger Ordnung Störungstheorie. In höheren Ordnungen gibt es große, berechenbare Korrekturen.

9.4 Massen und Diracspinoren der Quarks und Leptonen

Durch die Vakuumerwartungswerte der Higgsfelder enthalten die Yukawakopplungen im Superpotential Massenterme für die Quarks.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Superpot.}} &= \int d^2\theta (y_d H_d Q D + y_u H_u Q U + y_e H_d L E) + h.c. + \dots \\ &= -y_d v_d d_L d_R + y_u v_u u_L u_R - y_e v_d e_L e_R + h.c. + \dots\end{aligned}\quad (237)$$

Man beachte hierbei die Summationskonvention für Produkte von $SU(2)$ -Dubletts. Diese Terme lassen sich als Massenterme für die Diracspinoren

$$u = \begin{pmatrix} u_L \\ \bar{u}_R \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_L \\ \bar{d}_R \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} e_L \\ \bar{e}_R \end{pmatrix}\quad (238)$$

mit den Massen

$$m_u = -y_u v_u, \quad m_d = y_d v_d, \quad m_e = y_e v_d\quad (239)$$

schreiben,

$$\mathcal{L}_{m,q,l} = -m_u \bar{u}u - m_d \bar{d}d - m_e \bar{e}e.\quad (240)$$

Es instruktiv, die Yukawakopplungen durch bekannte Massen und Kopplungen auszudrücken:

$$y_u = -\frac{em_u}{\sqrt{2}M_W s_W s_\beta}, \quad y_d = \frac{em_d}{\sqrt{2}M_W s_W c_\beta}, \quad y_e = \frac{em_e}{\sqrt{2}M_W s_W c_\beta}.\quad (241)$$

Die up-type Yukawakopplung ist daher im Vergleich zum Standardmodell mit $1/s_\beta$ multipliziert, die down-type Yukawakopplungen mit $1/c_\beta$. Für große $\tan\beta$ bedeutet dies, daß die down-type Yukawakopplungen im Vergleich zum Standardmodell verstärkt sind ($\tan\beta$ -enhancement).

9.5 Massen und Mischungen der Squarks und Sleptonen

Die Superpartner der links- und rechtshändigen Quarks und Leptonen bezeichnen wir als links- und rechtshändige Squarks und Sleptonen, obwohl Skalarfelder natürlich keine Händigkeit oder Spin haben. Die linkshändigen Squarks und Sleptonen bilden $SU(2)_L$ -Dubletts, die rechtshändigen bilden Singletts. Nach spontaner Symmetriebrechung können links- und rechtshändige Squarks und Sleptonen aber miteinander mischen.

Massen- und Mischungsterme für Squarks und Sleptonen ergeben sich aus allen Termen in $\mathcal{L}_{\text{MSSM}}$, die quadratisch in den Squarks/Sleptonen sind und ansonsten höchstens noch Higgsfelder enthalten. Solche Terme gibt es in den D -Termen, F -Termen und in $\mathcal{L}_{\text{soft}}$. Die für die Squarks relevanten Terme sind

$$\mathcal{L}_{m,\tilde{q}}^D = -g^2 \left(\tilde{q}_L^\dagger T^a \tilde{q}_L + \tilde{u}_R T^a \tilde{u}_R^\dagger + \tilde{d}_R T^a \tilde{d}_R^\dagger \right) \left(H_d^\dagger T^a H_d + H_u^\dagger T^a H_u \right)$$

$$-g'^2 \left(\tilde{q}_L^\dagger Y \tilde{q}_L + \tilde{u}_R Y \tilde{u}_R^\dagger + \tilde{d}_R Y \tilde{d}_R^\dagger \right) \left(H_d^\dagger Y H_d + H_u^\dagger Y H_u \right), \quad (242)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m,\tilde{q}}^F = & - \left| y_d \tilde{q}_L^2 \tilde{d}_R^\dagger - \mu H_u^2 \right|^2 - \left| -y_u \tilde{q}_L^1 \tilde{u}_R^\dagger - \mu H_d^1 \right|^2 \\ & - \left| y_d H_d^1 \tilde{d}_R^\dagger \right|^2 - \left| -y_u H_u^2 \tilde{u}_R^\dagger \right|^2 - \left| y_d H_d^1 \tilde{q}_L^2 \right|^2 - \left| -y_u H_u^2 \tilde{q}_L^1 \right|^2, \end{aligned} \quad (243)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m,\tilde{q}}^{\text{Soft}} = & -m_{\tilde{q}}^2 |\tilde{q}_L|^2 - m_{\tilde{u}}^2 |\tilde{u}_R|^2 - m_{\tilde{d}}^2 |\tilde{d}_R|^2 \\ & - \left(y_d A_d H_d \tilde{q}_L \tilde{d}_R^\dagger + y_u A_u H_u \tilde{q}_L \tilde{u}_R^\dagger + h.c. \right). \end{aligned} \quad (244)$$

Setzen wir die Parametrisierung (220) der Higgsfelder um die Vakuumerwartungswerte ein, und vernachlässigen Terme der Ordnung $\phi_i^{0,\pm}, \chi_i^0$, erhalten wir aus den D - und F -Termen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m,\tilde{q}}^D = & -\frac{v_d^2 - v_u^2}{2} \left[g^2 \left(\tilde{q}_L^\dagger T^3 \tilde{q}_L + \tilde{u}_R T^3 \tilde{u}_R^\dagger + \tilde{d}_R T^3 \tilde{d}_R^\dagger \right) \right. \\ & \left. - g'^2 \left(\tilde{q}_L^\dagger Y \tilde{q}_L + \tilde{u}_R Y \tilde{u}_R^\dagger + \tilde{d}_R Y \tilde{d}_R^\dagger \right) \right], \end{aligned} \quad (245)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m,\tilde{q}}^F = & - \left[(-\mu^* v_u y_d \tilde{q}_L^2 \tilde{d}_R^\dagger - \mu^* v_d (-y_u) \tilde{q}_L^1) \tilde{u}_R^\dagger + h.c. \right] \\ & + (y_d v_d)^2 |\tilde{d}_R|^2 + (-y_u v_u)^2 |\tilde{d}_R|^2 \\ & + (y_d v_d)^2 |\tilde{q}_L^2|^2 + (-y_u v_u)^2 |\tilde{q}_L^1|^2, \end{aligned} \quad (246)$$

Der zweite Teil der F -Terme aus $\mathcal{L}_{m,\tilde{q}}^F$ ergibt genau die entsprechenden Quarkmassen.¹³ In $\mathcal{L}_{m,\tilde{q}}^D$ verwenden wir

$$(v_d^2 - v_u^2) = 2 \frac{M_W^2}{g^2} (c_\beta^2 - s_\beta^2) = 2 \frac{M_Z^2}{g^2} c_{2\beta} c_W^2 \quad (247)$$

und $c_W^2 T^3 - s_W^2 Y = T^3 - s_W^2 Q$. Außerdem benutzen wir, daß die Ladung der Antisquarks $\tilde{d}_R^\dagger, \tilde{u}_R^\dagger$ das negative der Quarkladung ist.

Nach analoger Rechnung für die Sleptonen lassen sich alle Massenterme für Squarks und Sleptonen übersichtlich in Matrixform schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m,\tilde{q},\tilde{l}} = & - \begin{pmatrix} \tilde{u}_L^\dagger & \tilde{u}_R^\dagger \end{pmatrix} M_{\tilde{u}}^2 \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{u}_R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{d}_L^\dagger & \tilde{d}_R^\dagger \end{pmatrix} M_{\tilde{d}}^2 \begin{pmatrix} \tilde{d}_L \\ \tilde{d}_R \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} \tilde{e}_L^\dagger & \tilde{e}_R^\dagger \end{pmatrix} M_{\tilde{e}}^2 \begin{pmatrix} \tilde{e}_L \\ \tilde{e}_R \end{pmatrix} - \tilde{\nu}_L^\dagger M_{\tilde{\nu}}^2 \tilde{\nu}_L \end{aligned} \quad (248)$$

mit den Massenmatrizen

$$M_{\tilde{u}}^2 = \begin{pmatrix} m_u^2 + m_{\tilde{q}}^2 + M_Z^2 c_{2\beta} (T_3 - Q s_W^2) & m_u (-\mu / \tan \beta + A_u^*) \\ m_u (-\mu^* / \tan \beta + A_u) & m_u^2 + m_{\tilde{u}}^2 + M_Z^2 c_{2\beta} Q s_W^2 \end{pmatrix},$$

¹³Bei exakter Supersymmetrie müßten die Squarks dieselben Massen wie die Quarks haben. Wir sehen hier aber, daß bei nichtverschwindenden Higgservartungswerten noch andere Terme beitragen, so daß zwingend eine Massenaufspaltung zwischen Quarks und Squarks folgt. Der Grund für die Aufspaltung ist, daß die Quarkmassen die Brechung der Eichsymmetrie erfordern und diese im MSSM nicht ohne Supersymmetriebrechung möglich ist.

$$\begin{aligned}
M_d^2 &= \begin{pmatrix} m_d^2 + m_{\tilde{q}}^2 + M_Z^2 c_{2\beta} (T_3 - Q s_W^2) & m_d (-\mu \tan \beta + A_d^*) \\ m_d (-\mu^* \tan \beta + A_d) & m_d^2 + m_{\tilde{d}}^2 + M_Z^2 c_{2\beta} Q s_W^2 \end{pmatrix}, \\
M_{\tilde{e}}^2 &= \begin{pmatrix} m_e^2 + m_{\tilde{q}}^2 + M_Z^2 c_{2\beta} (T_3 - Q s_W^2) & m_e (-\mu \tan \beta + A_e^*) \\ m_e (-\mu^* \tan \beta + A_e) & m_e^2 + m_{\tilde{e}}^2 + M_Z^2 c_{2\beta} Q s_W^2 \end{pmatrix}. \quad (249)
\end{aligned}$$

und der Sneutrino-masse

$$M_{\tilde{\nu}}^2 = m_{L,\tilde{\mu}}^2 + \frac{1}{2} M_Z^2 \cos 2\beta. \quad (250)$$

Es ist auch nützlich, die allgemeine Bezeichnung

$$M_{\tilde{f}}^2 = \begin{pmatrix} M_{\tilde{f}LL}^2 & m_f X_f^* \\ m_f X_f & M_{\tilde{f}RR}^2 \end{pmatrix}, \quad (251)$$

für die Sfermionmassenmatrizen einzuführen. Mit dieser Bezeichnung ist

$$X_f = A_f - \mu^* \{\cot \beta, \tan \beta\} \quad (252)$$

mit $\{\cot \beta, \tan \beta\}$ für up- und down-type Sfermionen. Die Diagonaleinträge $M_{\tilde{f}LL}^2$ und $M_{\tilde{f}RR}^2$ haben die Struktur

$$m_f^2 + \text{Softbrechung} + D\text{-Term},$$

wobei es wichtig ist, daß die linkshändigen Softbrechungsterme eines Dubletts (up- und down-Squark oder Seletron und Sneutrino) gleich sind. Der Grund ist die $SU(2)_L$ -Eichinvarianz, und die Konsequenz ist, daß nicht alle Sfermionmassen voneinander unabhängig gewählt werden können.

Die hermitesche Massenmatrix $M_{\tilde{f}}^2$ kann diagonalisiert werden von einer unitären Matrix $U^{\tilde{f}}$ in der Form

$$U^{\tilde{f}} M_{\tilde{f}}^2 U^{\tilde{f}\dagger} = \text{diag}(m_{\tilde{f}_1}^2, m_{\tilde{f}_2}^2), \quad (253)$$

und Sfermion-Masseneigenzustände können durch

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix} = U^{\tilde{f}} \begin{pmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R \end{pmatrix} \quad (254)$$

definiert werden.

Mit den neuen Feldern nehmen die Squark- und Sleptonmassenterme die Diagonalform

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{m,\tilde{q},\tilde{l}} &= -m_{\tilde{u}_1}^2 |\tilde{u}_1|^2 - m_{\tilde{u}_2}^2 |\tilde{u}_2|^2 - m_{\tilde{d}_1}^2 |\tilde{d}_1|^2 - m_{\tilde{d}_2}^2 |\tilde{d}_2|^2 \\
&\quad - m_{\tilde{e}_1}^2 |\tilde{e}_1|^2 - m_{\tilde{e}_2}^2 |\tilde{e}_2|^2 - \tilde{\nu}_L^\dagger M_{\tilde{\nu}}^2 \tilde{\nu}_L
\end{aligned} \quad (255)$$

an.

9.6 Massen und Mischungen der Neutralinos

Die Superpartner der elektrisch neutralen Eich- und Higgsbosonen können ebenfalls miteinander mischen. Genau wie aus den minimalen Kopplungs-Termen $|D^\mu H_{d,u}|^2$ die Eichbosonmassen entstehen (und die Goldstonebosonen unphysikalisch und von den longitudinalen Freiheitsgraden der Eichbosonen absorbiert werden), entstehen aus den entsprechenden Gaugino-Termen Mischungen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{m,\chi^0}^{\text{min.Kopplung}} &= \sqrt{2}ig'\lambda' \left(H_d^{1\dagger} Y \psi_{H_d}^1 + H_u^{2\dagger} Y \psi_{H_u}^2 \right) \\ &\quad + \sqrt{2}ig\lambda^3 \left(H_d^{1\dagger} T^3 \psi_{H_d}^1 + H_u^{2\dagger} T^3 \psi_{H_u}^2 \right) + h.c. \\ &= M_Z i(-s_W \lambda' + c_W \lambda^3) (c_\beta \psi_{H_d}^1 - s_\beta \psi_{H_u}^2) + h.c. + \dots\end{aligned}\quad (256)$$

Weitere Terme, die bilinear in den neutralen Gauginos/Higgsinos sind, gibt es nur in den Softbrechungstermen und Superpotentialen,

$$\mathcal{L}_{m,\chi^0}^{\text{Soft}} = \frac{1}{2} M_1 \lambda' \lambda' + \frac{1}{2} M_2 \lambda^3 \lambda^3 + h.c. \quad (257)$$

$$\mathcal{L}_{m,\chi^0}^{\text{Superpot.}} = \mu \psi_{H_d}^1 \psi_{H_u}^2 + h.c.. \quad (258)$$

Fassen wir alle neutralen Gauginos/Higgsinos in dem Vektor $\psi^0 = (-i\lambda', -i\lambda^3, \psi_{H_d}^1, \psi_{H_u}^2)^T$ zusammen, lassen sich alle Massenterme wieder übersichtlich in Matrixform schreiben,

$$\mathcal{L}_{m,\chi^0} = -\frac{1}{2} \psi^{0T} Y \psi^0 + h.c.. \quad (259)$$

mit der symmetrischen Massenmatrix

$$Y = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -M_Z s_W \cos \beta & M_Z s_W \sin \beta \\ 0 & M_2 & M_Z c_W \cos \beta & -M_Z c_W \sin \beta \\ -M_Z s_W \cos \beta & M_Z c_W \cos \beta & 0 & -\mu \\ M_Z s_W \sin \beta & -M_Z c_W \sin \beta & -\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (260)$$

Diese Matrix ist symmetrisch, aber nicht unbedingt reell und hermitesch. Man kann sie durch eine unitäre Matrix N diagonalisieren,¹⁴

$$N^* Y N^{-1} = \text{diag}(m_{\chi_1^0}, \dots, m_{\chi_4^0}). \quad (261)$$

Die entsprechenden Masseneigenzustände nennt man Neutralinos. Definieren wir die Neutralino-2-Spinoren durch

$$\chi_i^0 = N_{ij} \psi_j^0 \quad (262)$$

¹⁴Das entsprechende Verfahren wird als "Singular Value Decomposition" bezeichnet. Es beruht im Wesentlichen darauf, daß $Y^\dagger Y$ hermitesch ist und gewöhnlich diagonalisiert werden kann.

und Neutralino-4-Majoranaspinoren durch¹⁵

$$\tilde{\chi}_i^0 = \begin{pmatrix} \chi_i^0 \\ \bar{\chi}_i^0 \end{pmatrix}, \quad (263)$$

dann lautet der Massenterm

$$\mathcal{L}_{m,\chi^0} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 m_{\chi_j^0} \bar{\chi}_j^0 \tilde{\chi}_j^0. \quad (264)$$

9.7 Massen und Mischungen der Charginos

Die Mischungs- und Massenterme der geladenen Gauginos und Higgsinos haben denselben Ursprung wie die der Neutralinos,

$$\mathcal{L}_{m,\chi^\pm}^{\text{min.Kopplung}} = g \left(H_d^{1\dagger} i\lambda^+ \psi_{H_d}^2 + H_u^{2\dagger} i\lambda^- \psi_{H_u}^1 \right) + h.c., \quad (265)$$

$$\mathcal{L}_{m,\chi^\pm}^{\text{Soft}} = M_2 \lambda^+ \lambda^- + h.c., \quad (266)$$

$$\mathcal{L}_{m,\chi^\pm}^{\text{Superpot.}} = -\mu \psi_{H_d}^2 \psi_{H_u}^1 + h.c.. \quad (267)$$

Hier ist λ^\pm analog zu W_μ^\pm definiert. Um die Massenterme matrixwertig zu schreiben, führen wir die Vektoren $\psi^- = (-i\lambda^-, \psi_{H_d}^2)^T$, $\psi^+ = (-i\lambda^+, \psi_{H_u}^1)^T$ ein, wobei zu betonen ist, daß $\psi^- \neq (\psi^+)^\dagger$. Somit läßt sich der Charginomassenterm folgendermaßen schreiben:

$$\mathcal{L}_{m,\chi^\pm} = -\psi^{-T} X \psi^+ + h.c. \quad (268)$$

mit der Charginomassenmatrix

$$X = \begin{pmatrix} M_2 & M_W \sqrt{2} \sin \beta \\ M_W \sqrt{2} \cos \beta & \mu \end{pmatrix}. \quad (269)$$

X kann nicht symmetrisch gewählt werden. Zur Diagonalisierung sind zwei unitäre Matrizen U, V ausreichend:

$$U^* X V^{-1} = \text{diag}(m_{\chi_1^\pm}, m_{\chi_2^\pm}). \quad (270)$$

Die entsprechenden Masseneigenzustände nennt man Charginos. Wir definieren Chargino-2-Spinoren durch

$$\chi_i^+ = V_{ij} \psi_j^+, \quad (271)$$

$$\chi_i^- = U_{ij} \psi_j^-, \quad (272)$$

¹⁵In diesem Abschnitt bezeichnen wir die 4-Spinoren mit $\tilde{\chi}^0$, die 2-Spinoren mit χ^0 . Später lassen wir diese Unterscheidung fallen, da aus dem Zusammenhang immer hervorgehen wird, welcher Spinortyp gemeint ist.

das heißt, die positiv geladenen Komponenten transformieren mit V und die negativen mit U . Chargino-4-Spinoren sind durch

$$\tilde{\chi}_i^- = \begin{pmatrix} \chi_i^- \\ \chi_i^+ \end{pmatrix}, \quad \tilde{\chi}_i^+ = \begin{pmatrix} \chi_i^+ \\ \chi_i^- \end{pmatrix}, \quad \tilde{\chi}_i^- = (\tilde{\chi}_i^+)^C \quad (273)$$

definiert. Mit diesen Definitionen lassen sich die Charginomassenterme in der Diagonalform

$$\mathcal{L}_{m,\chi^\pm} = - \sum_{j=1}^2 m_{\chi_j^\pm} \bar{\chi}_j^\pm \tilde{\chi}_j^\pm \quad (274)$$

schreiben.

9.8 Gluinos

Die Gluinos mischen mit keinen anderen Teilchen, sondern sind bereits Masseneigenzustände. Die Masse der Gluinos ist direkt durch den Soft-Brechungsterm M_3 gegeben:

$$m_{\tilde{g}} = |M_3|. \quad (275)$$

Falls M_3 reell ist, definieren wir analog zu den Neutralinos und Charginos auch für die Gluinos 4-Spinoren durch

$$\tilde{g}^a = \begin{pmatrix} -i\lambda_s^a \\ i\bar{\lambda}_s^a \end{pmatrix}, \quad (276)$$

und wir erhalten

$$\mathcal{L}_{m,\tilde{g}} = \frac{1}{2} M_3 \lambda_s^a \lambda_s^a + h.c. = -\frac{1}{2} m_{\tilde{g}} \bar{\tilde{g}}^a \tilde{g}^a. \quad (277)$$

Falls $M_3 = e^{i\phi_{M_3}} |M_3|$ komplex ist, läßt sich eine Phasentransformation $\lambda_s^a \rightarrow e^{-i\phi_{M_3}/2} \lambda_s^a$ durchführen, durch die M_3 effektiv reell wird.

10 Feynmanregeln

Die Feynmanregeln lassen sich aus der MSSM-Lagrangedichte in der üblichen Weise gewinnen. In der ursprünglichen Basis mit symmetrischen Feldern und Parametern nehmen die Wechselwirkungen und Vertizes eine einfache Form an, aber die Propagatoren sind wegen der Mischungen kompliziert. In der Basis mit Masseneigenzustands-Feldern nehmen die Propagatoren eine übliche, diagonale Form an, aber die Wechselwirkungsvertizes sind relativ komplizierte Kombinationen von ursprünglichen Kopplungen und Diagonalisierungsmatrizen.

Der allgemeine Fall der Herleitung von Feynmanregeln in Gegenwart von Mischungen ist in Abschnitt 7.1 diskutiert. Hier geben wir zur Verdeutlichung ein Beispiel einer wichtigen MSSM-Feynmanregel an. Die Herleitung verdeutlicht die

$$\begin{aligned} \bar{g}^a &\longrightarrow \begin{array}{l} \text{---} \tilde{q}_i^\dagger \\ \text{---} q \end{array} &= i \left(-\sqrt{2}g_s U_{i1}^{\tilde{q}} P_L + \sqrt{2}g_s U_{i2}^{\tilde{q}} P_R \right) \frac{\lambda^a}{2} \\ \\ \tilde{g}^a &\longrightarrow \begin{array}{l} \text{---} \tilde{q}_i \\ \text{---} \bar{q} \end{array} &= i \left(-\sqrt{2}g_s (U_{i1}^{\tilde{q}})^* P_R + \sqrt{2}g_s (U_{i2}^{\tilde{q}})^* P_L \right) \frac{\lambda^a}{2} \end{aligned}$$

Figure 9: Feynmanregeln der Quark–Squark–Gluino-Vertizes im MSSM. Genau wie in Fig. 8 lassen sich auch hierfür geflippte Feynmanregeln angeben, die in praktischen Rechnungen nützlich sein können.

allgemeine Vorgehensweise und illustriert die allgemeinen Überlegungen aus Abschnitt 7.1. Eine vollständige Liste aller MSSM-Feynmanregeln in den hier benutzten Konventionen findet sich in Ref. [18].

10.1 Quark–Squark–Gluino-Kopplungen

In der ursprünglichen Lagrangedichte in Weylspinor-Notation sind diese Wechselwirkungen gemäß Gl. (174) und (211) durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{q\tilde{q}\tilde{g}} &= -\sqrt{2}g_s (i\bar{q}_L \bar{\lambda}_s \tilde{q}_L - \tilde{q}_L^\dagger i\lambda_s q_L) \\ &\quad -\sqrt{2}g_s (i\bar{u}_R (-\bar{\lambda}_s^T) \tilde{u}_R^\dagger - \tilde{u}_R i(-\lambda_s^T) u_R) \\ &\quad -\sqrt{2}g_s (i\bar{d}_R (-\bar{\lambda}_s^T) \tilde{d}_R^\dagger - \tilde{d}_R i(-\lambda_s^T) d_R) \end{aligned} \quad (278)$$

gegeben. Ersetzen wir die auftretenden Weylspinoren durch Dirac- bzw. Majoranaspinoren und die Squarks durch Masseneigenzustände, erhalten wir

$$\mathcal{L}_{q\tilde{q}\tilde{g}} = \sum_{q=u,d} \sum_{i=1,2} \tilde{q}_i^\dagger \tilde{g}^a (P_L g_{Li} + P_R g_{Ri}) \frac{\lambda^a}{2} q + \bar{q} (P_R g_{Li}^* + P_L g_{Ri}^*) \frac{\lambda^a}{2} \tilde{g}^a \tilde{q} \quad (279)$$

mit den Kopplungen

$$g_{Li} = -\sqrt{2}g_s U_{i1}^{\tilde{q}}, \quad (280)$$

$$g_{Ri} = +\sqrt{2}g_s U_{i2}^{\tilde{q}}. \quad (281)$$

Die sich ergebenden Feynmanregeln sind in Fig. 9 angegeben.

References

- [1] J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, 1984.
- [2] A. Denner, H. Eck, O. Hahn, J. Küblbeck, *Nucl. Phys.* **B387** (1992) 467.
- [3] A. Denner, *Fortschr. Phys.* **41** (1993) 307.
- [4] M. Drees, *An Introduction to Supersymmetry*, KEK-TH-501.
- [5] M. Drees, R. Godbole, P. Roy, *Theory and Phenomenology of Sparticles: An Account of Four-Dimensional $N=1$ Supersymmetry in High Energy Physics*, World Scientific Publishing Company.
- [6] S. Ferrara, J. Wess, B. Zumino, *Phys. Lett.* **B51** (1974) 239.
- [7] H.E. Haber, “Introductory Low-Energy Supersymmetry”, in *Proc. of the 1992 Theoretical Advanced Study Institute in Particle Physics*, ed. J. Harvey and J. Polchinski (World Scientific, Singapore, 1993), S. 583.
- [8] H.E. Haber, G.L. Kane, *Phys. Rep.* **117** (1985) 75
- [9] A. Salam, J. Strathdee, *Nucl. Phys.* **B76** (1974) 477.
- [10] I. Simonsen, *A Review of Minimal Supersymmetric Electro Weak Theory*, **hep-ph/9506369**.
- [11] H. Baer, X. Tata, *Weak Scale Supersymmetry: From Superfields to Scattering Events*, Cambridge University Press.
- [12] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, 2.nd Edition, Princeton Series in Physics, 1992.
- [13] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. I*, Cambridge University Press, 1995.
- [14] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. II*, Cambridge University Press, 1996.
- [15] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. III*, Cambridge University Press, 1996.
- [16] P. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, World Scientific Publishing Co., 1990.
- [17] I. Jack, D.R.T. Jones, *Non-standard soft supersymmetry breaking*, *Phys. Lett.* **B457** (1999) 101.
- [18] T. Hahn, FeynArts Paket, Datei `FeynArts/Models/MSSM.ps.gz`. Erhältlich unter www.feynarts.de.