

Standardmodell Lagrangedichte zur Vorlesung BSM 2020

D. Stöckinger, H. Stöckinger-Kim

Definition der Lagrangedichte des Standardmodells

Grundlegende Felder, Definitionen und Quantenzahlen

Jede Yang-Mills Theorie ist definiert durch Angabe der Eichgruppe und der Angabe der Materiefelder und deren Darstellung. Das Standardmodell hat die Eichgruppe $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Diese Eichgruppe hat $8 + 3 + 1 = 12$ Generatoren; daher hat das Standardmodell 12 reelle Eichfelder: acht Gluonfelder, drei Felder für den schwachen Isospin, und ein Feld für die Hyperladung, jeweils bezeichnet als

$$G_\mu^a \quad (a = 1 \dots 8) \qquad W_\mu^a \quad (a = 1 \dots 3) \qquad B_\mu. \quad (1)$$

Zu den drei Faktoren der Eichgruppe ist jeweils eine Eichkopplung definiert, die wir als g_3, g_W, g_Y bezeichnen. Aus den Eichfeldern lassen sich Feldstärketensoren definieren, die hier die Form

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_3 f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (2)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g_W \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (3)$$

$$B^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu \quad (4)$$

annehmen, wobei f^{abc} und ϵ^{abc} die Strukturkonstanten der $SU(3)$ - und $SU(2)$ -Gruppen sind. Das Standardmodell besitzt drei Arten von Materiefeldern: linkshändige Fermionen (Quarks und Leptonen), rechtshändige Fermionen (Quarks und Leptonen), sowie Skalarfelder (das Higgsdublett). Es ist üblich, die Materiefelder in sogenannte irreduzible Darstellungen zu zerlegen. Ein allgemeines irreduzibles Materie-Multiplett kann in super-expliziter Notation als $\varphi_{i,p}$ mit einem $SU(2)_L$ -Index i und einem $SU(3)_C$ -Index p geschrieben werden. Die infinitesimale Eichtransformation lautet dann

$$\varphi_{i,p} \longrightarrow \varphi'_{i,p} = \varphi_{i,p} - ig_3 \sum_{a=1}^8 \Theta^a \mathbf{T}_{pq}^a \varphi_{i,q} - ig_W \sum_{a=1}^3 \theta^a T_{ij}^a \varphi_{j,p} - ig_Y \theta^4 Y \varphi_{i,p}, \quad (5)$$

wobei \mathbf{T}^a, T^a, Y jeweils die Generatoren für die entsprechende Darstellung der jeweiligen Eichgruppe sind. Die $\Theta^a, \theta^a, \theta^4$ stellen die x -abhängigen infinitesimalen Eichtransformationsparameter dar.

Die kovariante Ableitung ist gegeben durch

$$(D_\mu \varphi)_{i,p} = \partial_\mu \varphi_{i,p} + ig_3 \sum_{a=1}^8 G_\mu^a \mathbf{T}_{pq}^a \varphi_{i,q} + ig_W \sum_{a=1}^3 W_\mu^a T_{ij}^a \varphi_{j,p} + ig_Y B_\mu Y \varphi_{i,p}. \quad (6)$$

Die Materiefelder und die jeweiligen Generatoren sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

Materie-Multiplett	$SU(3)_C : \mathbf{T}^a$	$SU(2)_L : T^a$	$U(1)_Y : Y$
$Q^I = \begin{pmatrix} u_L^I \\ d_L^I \end{pmatrix}$	$\lambda^a/2$	$\sigma^a/2$	$1/6$
u_R^I	$\lambda^a/2$	0	$2/3$
d_R^I	$\lambda^a/2$	0	$-1/3$
$L^I = \begin{pmatrix} \nu_L^I \\ l_L^I \end{pmatrix}$	0	$\sigma^a/2$	$-1/2$
e_R^I	0	0	-1
$\Phi = \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H + iG) \end{pmatrix}$	0	$\sigma^a/2$	$1/2$

Die Indizes I stehen für Generationen-Indizes, $I = 1, 2, 3$.

Lagrangedichte

Mit diesen Definitionen lautet die Lagrangedichte des Standardmodells

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{Eich}} + \mathcal{L}_{\text{Mat},f} + \mathcal{L}_{\text{Mat},\Phi} + \mathcal{L}_{\text{Yuk}} - V \quad (7)$$

mit den einzelnen Termen

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}} = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} \sum_{a=1}^3 F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (8)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Mat},f} = \sum_{\psi_i} \bar{\psi}_i i \gamma^\mu D_\mu \psi_i \quad (9)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Mat},\Phi} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) \quad (10)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk}} = -y_e^{IJ} \bar{L}^I \Phi e_R^J - y_d^{IJ} \bar{Q}^I \Phi d_R^J - y_u^{IJ} \bar{Q}^I \Phi^C u_R^J + \text{h.c.} \quad (11)$$

$$V = -\mu^2 |\Phi|^2 + \lambda |\Phi|^4. \quad (12)$$

In der Fermion-Materie-Lagrangedichte durchläuft ψ_i alle Fermionmultipletts der Theorie, also $\psi_i = Q^I, u_R^I, d_R^I, L^I, e_R^I$, und das ladungskonjugierte Higgsdublett ist als

$$\Phi^C = i\sigma^2 \Phi^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H - iG) \\ -G^- \end{pmatrix} \quad (13)$$

mit $G^- = (G^+)^\dagger$ definiert.

Definitionen von Feldern für Masseneigenzustände

Wir definieren den schwachen Mischungswinkel θ_W sowie die elektromagnetische Eichkopplung e und den elektrischen Ladungsoperator Q sowie weitere Linearkombinationen von Generatoren

$T^{+,-,Z}$ durch¹

$$\tan \theta_W = \frac{\sin \theta_W}{\cos \theta_W} \equiv \frac{s_W}{c_W} = \frac{g_Y}{g_W} \quad e = s_W g_W = c_W g_Y \quad (14)$$

$$Q = T^3 + Y \quad T^Z = T^3 - Q s_W^2 \quad T^\pm = T^1 \pm iT^2 \quad (15)$$

sowie neue Eichfelder für Photon, Z und W^\pm durch

$$\begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^\mu \\ W^{3\mu} \end{pmatrix} \quad W^{\pm\mu} = \frac{W^{1\mu} \mp iW^{2\mu}}{\sqrt{2}}.$$

Damit lässt sich die kovariante Ableitung für den $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Anteil schreiben als

$$D_\mu^{\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y} = \partial_\mu + \frac{ie}{\sqrt{2}s_W} (W_\mu^+ T^2 + W_\mu^- T^-) + ieQA^\mu + \frac{ie}{s_W c_W} T^Z Z^\mu. \quad (16)$$

Setzt man die Zerlegung des Higgsfeldes in die kovariante Ableitung und dann in $\mathcal{L}_{\text{Mat},\Phi}$ ein und nimmt nur die Terme $\propto v^2$ mit, so ergibt sich

$$\mathcal{L}_{\text{Mat},\Phi}|_{v^2\text{-terme}} = M_W^2 W^{+\mu} W_\mu^- + \frac{M_Z^2}{2} Z^\mu Z_\mu \quad (17)$$

mit

$$M_W^2 = \frac{e^2 v^2}{4s_W^2} = \frac{g_W^2 v^2}{4} \quad (18)$$

$$M_Z^2 = \frac{e^2 v^2}{4s_W^2 c_W^2} = \frac{g_W^2 v^2}{4c_W^2}. \quad (19)$$

Dies sind die Massenterme für W- und Z-Bosonen. Setzt man die Zerlegung des Higgsfeldes in das Higgspotential V ein, ergibt sich zunächst: die Higgspotential ist minimiert durch $\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}v \end{pmatrix}$ bzw. äquivalent durch $H = G = G^+ = 0$, genau dann, wenn

$$v^2 = \mu^2/\lambda \quad (20)$$

gilt. Setzen wir diese Relation voraus und setzen das Higgsfeld in das Higgspotential ein, ergibt sich

$$V|_{H^2\text{-terme}}^{(20) \text{ gilt}} = \frac{M_H^2}{2} H^2, \quad (21)$$

$$M_H^2 = 2\lambda v^2. \quad (22)$$

Dies ist der Higgsbosonmassenterm.

¹Man beachte, dass alle genannten Relationen in niedrigster Ordnung Störungstheorie gelten. In höheren Ordnungen können sich einige Relationen ändern, in Abhängigkeit dessen, wie die verschiedenen Größen definiert sind. Im häufig benutzten $\overline{\text{MS}}$ -Schema für alle Parameter gelten die Gleichungen (14) per Definition exakt, in anderen Schemata gibt es unter Umständen Korrekturen höherer Ordnung.