Standardmodel

Bausteine des Stand. Modells sind die Eichgruppen

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$$

$SU(3)_C$: QCD
$SU(2)_L$: schwacher Isospin
$U(1)_Y$: Hyperladung Y

Die $SU(2)_L$ transformiert nur linkshändige Felder

$$\psi = \underbrace{\tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)}_{P_R}\psi + \underbrace{\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)}_{P_L}\psi$$

$\sim \psi_R \qquad \sim \psi_L$

Erinnerung $\gamma_5^2 = 1 \qquad \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$

$P_R^2 = P_R \qquad P_L^2 = P_L$

$P_R P_L = P_L P_R = 0$

Die linkshändigen Felder sind Dupletts unter $SU(2)$

$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$

Die rechtshändigen Singletts

$\nu_R, u_R,$
e_R, d_R

$L, Q, \nu_R, e_R, u_R, d_R$
+ 2 weitere Familien i
$\Rightarrow L^i, Q^i, \nu_R^i, e_R^i, u_R^i, d_R^i$

Die Quarks tragen zusätzlich eine Farbladung und transformieren unter $SU(3)_C$.
Außerdem tragen alle Teilchen eine Hyperladung

$X_{i,a,j,y,\binom{\mu}{c}}$

i = Generation
a = Farbe
j = schwacher Isospin
y = Hyperladung

$U \in SU(3)$

$UX \Rightarrow U_{ba} X_{\dots,a,\dots}$

Etwas Gruppentheorie:

Betrachte die Gruppe $G = SU(3)$, d.h. die Menge unitären 3×3 Matrizen mit $\det U = 1$,
unitär: $U \in G$: $U^\dagger U = 1$ bzw. $U^{-1} = U^\dagger$
für die Gruppeneigenschaft muss natürlich gelten
$U_1, U_2 \in G \Rightarrow U_1 \cdot U_2 \in G$, ist allerdings offensichtlich

Betrachtet man nur infinitesimale Transformationen läßt sich die entsprechende Eigenschaft der Generatoren (Elemente der zugehörigen Algebra) bestimmen. $U = 1 + iH$ (Lie)

$1 = U^\dagger U = (1 - iH^\dagger)(1 + iH) = 1 + i(H - H^\dagger) \rightsquigarrow H = H^\dagger$ ↲ hermitisch

$\boxed{U = e^{iH}}$

Weiterhin müssen wir noch die Determinante berechnen, da $\det U = 1$
also,

$$\det U = \det\left(e^{iH}\right) = \det\left(e^{i W^\dagger \Lambda W}\right) \qquad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$
$$= \det\left(W^\dagger e^{i\Lambda} W\right) \qquad W \text{ unitäre Matrix}$$
$$= \det\left(e^{i\Lambda}\right) = \prod_j e^{i\lambda_j} = e^{i\sum \lambda_j} = e^{i\,\mathrm{tr}\,\Lambda} = e^{i\,\mathrm{tr}\,H} \qquad e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$$
$$\rightsquigarrow \det U = 1 \overset{!}{=} \mathrm{tr}\, H = 0$$

d.h. die Generatoren der $SU(3)$ [$SU(N)$] sind spurlose hermitische $N\times N$ Matrizen (in der def. Darstellung)

die Generatoren bilden die entsprechende Algebra mit der Vertauschungsrelation $[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c$

Anzahl der spurlosen $N\times N$ Matrizen $N-1$ reelle Diagonalelemente
$\frac{1}{2}(N^2 - N) = \frac{1}{2}N(N-1)$ Elemente unterhalb der Diagonalen (komplex)
$(N-1) + 2\,\frac{1}{2}N(N-1) = N^2 - 1$

$\dim(SU(N)) = N^2 - 1$

Gellmann Matrizen: 3x3 Matrizen hermitisch, spurlos

$$\lambda^j = \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Die Generatoren der $SU(3)$ sind dann $t^i = \frac{\lambda^i}{2}$

Sie erfüllen $[t, t] = i f^{ijk} t^k$ mit den Strukturkonstanten

$$f^{123} = 1 = 2f^{147} = 2f^{246} = 2f^{257} = 2f^{345} = -2f^{156} = -2f^{367}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} f^{458} = \frac{2}{\sqrt{3}} f^{678}$$

$\boxed{\text{total antisymmetrisch}}$

Die Normierung wurde so gewählt, daß $\mathrm{Tr}\, t^a t^b = \frac{1}{2} \delta^{ab}$

Die Strukturkonstanten selbst bilden ebenfalls eine Darstellung (die adjungierte Darstellung)

$$C^a_{bc} = -i f abc \qquad 8\ (8\times 8)\ \text{Matrizen}$$

In praktischen Rechnungen ist es meistens genug Spuren oder Kontraktionen der Generatoren zu kennen

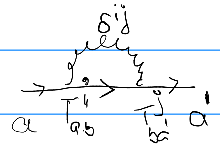
$$\mathrm{Tr}\, C^a C^b = \delta^{ab} C_A \quad \text{quadr.}$$
$$(t^a t^a)_{ik} = \delta_{ik} C_F \quad \text{Casimir} \qquad \mathrm{Tr}\, t^a t^b = \delta^{ab} T_F \leftarrow \text{Index}$$

$$C_A = N_c \qquad C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2 N_c} \qquad T_F = \frac{1}{2}$$
$$= 3 \qquad\qquad = \frac{4}{3}$$

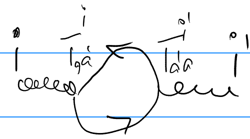
in niedrigen Ordnung läßt sich die ganze Farbalgebra auf diese Konstanten reduzieren. Später treten dann auch höhere Invarianten auf z.B.

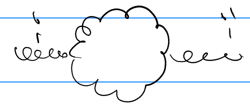
$$d_{33} = \mathrm{Tr}\left(T^{\{a} T^b T^{c\}}\right) \mathrm{Tr}\left(T^{\{a} T^b T^{c\}}\right) \qquad \{a,b,c\} \text{ symmetrisiert}$$

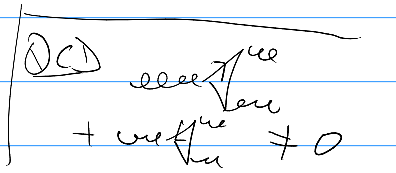
Beispiele, wieso dies ausreicht:

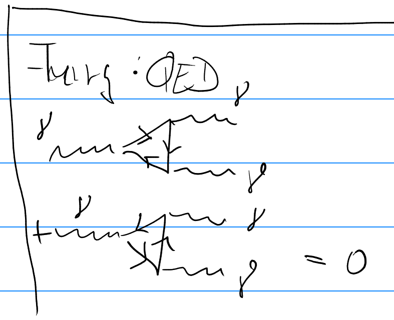
-  $T^i_{ab}\, T^j_{ba'} = \delta_{aa'}\, C_F$

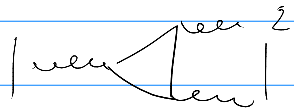
  $\Rightarrow$ Propagator bleibt farb-diagonal

-  $= T^i_{aa'}\, T^{i'}_{a'a} = T_F\, \delta^{ii'}$

-  $= C^i_{ab}\, C^{i'}_{ba} = \delta^{ii'}\, C_A$





woher kommt ein d_{33}? z.B.  , wobei dieser Beitrag vermutlich 0 ist?

wegen Furry's theorem

Zusammenfassung:

die SU(N) haben als Generatoren spurfreie hermitische Matrizen (N^2-1) Stück.

Für praktische Anwendungen reicht es in der Regel aus Spuren und Kontraktionen der Generatoren zu berechnen.

Was ist die allgemeinste Lagrangedichte, die wir unter Berücksichtigung der Invarianz unter Eichtransformationen hinschreiben können?

Betrachten wir zunächst nur $SU(2)_L$

$$\mathcal{L} = \bar{L}\not{D}L + \bar{Q}\not{D}Q - \frac{1}{4}W_a^{\mu\nu}W^a_{\mu\nu} + \bar{u}\not{\partial}u + \bar{d}\not{\partial}d + \bar{e}\not{\partial}e + \bar{\nu}\not{\partial}\nu$$

Massenterme $m\bar{\psi}_R\psi_R \quad m\bar{\psi}_L\psi_L$ ok bzgl. $SU(2)$

$$\psi_L = \frac{(1-\gamma_5)}{2}\psi \qquad \bar{\psi}_L = \bar{\psi}\,\frac{(1+\gamma_5)}{2}$$

$$\psi_R = \frac{(1+\gamma_5)}{2}\psi \qquad \bar{\psi}_R = \bar{\psi}\,\frac{(1-\gamma_5)}{2}$$

$$m\bar{\psi}_R\psi_R = m\bar{\psi}\underbrace{\frac{(1-\gamma_5)}{2}\frac{(1+\gamma_5)}{2}}_{=0}\psi$$

$\bar{u}_R\not{\partial}d_R$ ok für $SU(2)$ aber ansonsten nicht so gut ☺

diese Lagrangedichte enthält kin. Terme für alle Felder, die Selbstwechselwirkung der Eichfelder und die Kopplung der Materiefelder an die Eichfelder.
Diese Lagrangedichte ist invariant unter $SU(2)$ Transformationen. Die Transformation der Eichfelder wurde entsprechend konstruiert und die kov. Ableitung D_μ transformiert homogen.

Aber: Diese Lagrangedichte beschreibt nur masselose Felder. Ein Masseterm für die Materiefelder L, Q, e, ν, u, d ist nicht erlaubt!

Ein Term $\bar{L}L$ ist durch $SU(2)$ erlaubt aber

$$L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)L \qquad \bar{L} = \bar{L}\left(\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\right)$$

also $\bar{L}L = 0$

Terme $\bar{L}e$ sind in $SU(2)$ Wahrheit nicht erlaubt und eine Konstruktion $\bar{L}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}e$ ist nicht $SU(2)$ invariant!

Kein Problem in QED oder QCD, hier explizite Masseterme möglich

Lösung: Spontane Symmetriebrechung und Higgs-Mechanismus

Spontane Symmetriebrechung

① Goldstone model:

Selbstwechselwirkende komplexes skalares Feld ϕ

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - V(\phi)$$

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\left(|\phi|^2 - \frac{\mu^2}{\lambda}\right)^2 = \frac{\lambda}{4}|\phi|^4 - \frac{\mu^2}{2}|\phi|^2 + \frac{\mu^4}{4\lambda}$$

invariant unter globalen Phasentransformationen

$$\phi(x) \to e^{i\theta}\phi(x) \qquad \phi^\dagger(x) \to e^{-i\theta}\phi^\dagger(x) \qquad \theta = \text{const}$$

betrachte 2 Fälle: $\mu^2 < 0 < \mu^2$

$\mu^2 < 0$: $-\frac{\mu^2}{2}|\phi|^2$ ist ein Massenterm

Feld hat Masse μ

Potential hat ein eindeutiges Minimum

$\hat{=}$ Feldkonfiguration minimaler Energie

$\hat{=}$ klassisches Vakuum

$$\phi_0(x) = 0$$

$\mu^2 > 0$: Phase spontan gebrochener Symmetrie
Die Feldkonfiguration $\phi_0(x) = v e^{i\theta}$ $v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$
minimiert die Energie für jedes θ.
verschiedene Werte für θ lassen sich durch globale Transformationen erreichen.
Die Wahl eines bestimmten θ z.B. $\theta = 0$ bricht die Symmetrie

Für Störungstheorie entwickle das Feld um dieses Minimum

$$\phi(x) = (v + h(x)) \exp\left[i\left(\theta + \frac{\xi(x)}{\sqrt{2}\, v}\right)\right]$$

Einsetzen in Lagrangedichte:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi \partial^\mu \xi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu h \partial^\mu h) - \frac{1}{2}\mu^2 h^2$$
$$- \frac{\lambda v}{2\sqrt{2}} h^3 - \frac{\lambda}{16} h^4 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi)\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{\mu} h + \frac{\lambda}{2\mu^2} h^2\right)$$

wir erhalten:

- $h(x)$ skalares Feld mit Masse μ
  $\hat{=}$ radialen Anregungen $\hat{=}$ nicht verschwindende Krümmung
- $\xi(x)$ masseloses skalares Feld $\hat{=}$ Goldstone Feld
  $\hat{=}$ verschwindende Krümmung entlang des Pot. Minimums

Allgemeine Eigenschaft von spontaner Symmetriebrechung:
Auftreten von masselosen skalaren Feldern
$\hat{=}$ Goldstone Bosonen

2) nicht-abelsche Symmetrien und Goldstone Theorem

Betrachte ein Multiplett von skalaren Feldern
$\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$, die unter einer reellen
Darstellung T^a $a = 1, \ldots, \dim G$ der Gruppe G transformieren

$$\phi_i' \stackrel{(+)}{=} \exp(i\theta_a T^a)_{ij}\, \phi_j(x) \quad \Big| \quad \text{inf.} \quad \delta\phi_i = i\delta\theta^a T^a_{ij}\, \phi_j$$

die Lagrangedichte sei wieder

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi_i)(\partial_\mu \phi_i) - V(\phi)$$

und das Potential invariant unter Transformationen
Für inf. Transformationen bedeutet dies

$$0 = \delta V = \frac{\partial V}{\partial \phi_i}\,\delta\phi_i = i\frac{\partial V}{\partial \phi_i} T^a_{ij}\,\phi_j\, \delta\theta^a$$

$\delta\theta^a$ ist beliebig also gilt $\boxed{\frac{\partial V}{\partial \phi_i} T^a_{ij}\,\phi_j = 0}$ $\forall\, a = 1, \ldots, \dim G$

Leiten wir dies noch einmal nach ϕ_k ab, erhalten wir

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i \partial\phi_k} T^a_{ij}\,\phi_j + \frac{\partial V}{\partial \phi_i}\underbrace{T^a_{ij}\,\delta_{jk}}_{T^a_{ik}} = 0$$

Spontane Symmetriebrechung tritt auf, falls es
das Potential minimal für eine Feldkonfiguration
$\phi(x) = v = (v_1, \ldots, v_n) \neq 0$

d.h. $\left.\frac{\partial V}{\partial \phi_i}\right|_{\phi = v} = 0$ Bedingung für Extremum

$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i \partial\phi_k}\right|_{\phi = v} = (M^2)_{ki}$ $M^2 \geq 0$, im Sinne, daß
M^2 pos.-definit ist

Aufgrund der Symmetrie ist auch

$$\exp(i\Theta^a T^a)v$$

eine Konfiguration minimaler Energie!
Entwickeln wir die Felder wieder um die Konfiguration minimaler Energie $\tilde{\phi}_i(x) = \phi_i(x) - v_i$
erhalten wir bis 2. Ordnung in $\tilde{\phi}(x)$ die Lagr. dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \tilde{\phi}_i)(\partial_\mu \tilde{\phi}_i) - \frac{1}{2}(M^2)_{ki}\tilde{\phi}_k(x)\tilde{\phi}_i(x) + \dots$$

Massenmatrix

$V(x)$ Taylorentwicklung bis 2. Ordnung

weiterhin gilt: $(M^2)_{ki} T^a_{ij} v_j = 0 \qquad a = 1, \dots, \dim G$

im Allgemeinen ist das Vakuum invariant unter einer Untergruppe $H \subset G$, der Stabilisator Gruppe
wählen wir die Generatoren T^a von G geeignet, können wir die Generatoren $\hat{T}^{\hat{a}}$ von H $\hat{a} = 1, \dots, \dim H$
$\hat{T}^{\hat{a}} = T^{\hat{a}}$ setzen
Invarianz des Vakuums bedeutet dann

$$\hat{T}^{\hat{a}}_{ij} v_j = 0 \qquad \hat{a} = 1, \dots, \dim H$$

die verbleibenden Generatoren $\check{T}^{\check{a}}$ $\check{a} = \dim H + 1, \dots, \dim G$
bilden das Coset (Restklasse) G/H und es gilt

$$\check{T}^{\check{a}}_{ij} v_j \neq 0 \qquad \check{a} = \dim H + 1, \dots, \dim G$$

als Folge sind $\dim H$ Gleichungen von
$0 = (M^2)_{ij} T^a_{jk} v_k$ automatisch erfüllt

die verbleibenden Gleichungen erfordern Eigenwert 0 für M^2

Goldstone Theorem:

- Die Massenmatrix $(M^2)_{ik} = \frac{\partial V}{\partial \phi_i}\frac{\partial V}{\partial \phi_k}\Big|_{\phi=v}$ hat $\dim G - \dim H$ Eigenwerte 0, einen für jeden gebrochenen Generator.
- Die zugeordneten Felder heißen Goldstone Felder
- Die verbleibenden Eigenwerte von M^2 sind positiv.

Explizites Beispiel: Lineares Sigma Modell

$\phi = \{\phi_i\}_{1 \dots N}$ die unter $G = SO(N)$ transformieren

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - V(\phi)$$
$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\left(|\phi|^2 - \frac{\mu^2}{\lambda}\right)^2$$

Minimum des Potentials bei $\phi_{i,0}\phi_{i,0} = v_i v_i = \frac{\mu^2}{\lambda} = v^2 > 0$

Diese Gleichung beschreibt ein $(N-1)$ dimensionale Kugeloberfläche mit Radius v im N-dimensionalen euklidischen Raum.

Wähle eine explizite Feldkonfiguration in N-Richtung

$v = (0 \dots 0, v)$

Diese Konfiguration ist noch immer invariant unter Transf. der ersten $N-1$ Komponenten unter $SO(N-1) = H$

Mit $\dim SO(N) = \frac{N(N-1)}{2}$ ergibt sich

$\dim G = \frac{N(N-1)}{2}$

$\dim H = \frac{(N-1)(N-2)}{2}$ $\Rightarrow$ $\dim G - \dim H = N-1$

$\Rightarrow$ $N-1$ masselose Felder $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_{N-1})$ und 1 massives Feld σ

$$O = 1 + A$$

$$1 = O^t O = 1 + (A + A^t) \Rightarrow A \text{ antisymmetrisch}$$

$$\Downarrow$$

$$O = 1 + i \underbrace{(-iA)}_{H}$$

$\frac{n(n+1)}{2}$ entspricht Anzahl der Matrixelemente über oder unter der Diagonalen

$$A^{ij} = \delta^{ij} \quad i > j$$
$$A^{ij} = -\delta^{ij} \quad i < j$$

$\hat{=}$ Rotationen in der i-j Ebene mit $\vec{\phi} = (\vec{\pi}, v+\sigma)$ erhält man

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) + \frac{1}{2}(\partial^\mu \pi)(\partial_\mu \pi)$$
$$- \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \frac{\lambda}{4}(\pi^2+\sigma^2)^2 - \lambda v \sigma(\pi^2+\sigma^2)$$

Spontane Brechung einer Eichsymmetrie

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{a\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu \phi_i)(D^\mu \phi_i) - V(\phi)$$

Wieder brechen wir die (Eich)-Symmetrie G zu einer Gruppe H.
Wie beim Goldstone Modell parametrisieren wir die Felder ϕ

$$\phi(x) = \exp\left(i \frac{T^{\hat{a}} \xi^{\hat{a}}(x)}{v}\right)(v + \eta(x))$$

$\dim G - \dim H$ Goldstone Felder $\xi^{\hat{a}}$ treten im exponenten auf
und $\eta(x)$ hat nur $n - (\dim(G) - \dim(H))$ Freiheitsgrade.
Die Bedingung, daß η keine Goldstone-Felder enthält lautet

$$\eta_i T_{ij}^{\hat{a}} v_j = 0 \qquad \eta \perp T_{ij}^{\hat{a}} v_j$$

In einer Eichtheorie lassen sich die Goldstone Bosonen durch eine Eichtransformation entfernen und es verbleibt nur $\phi(x) = v + \eta(x)$

Für die Lagrangedichte ergibt sich dann

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{a\mu\nu} + \frac{1}{2}(M^2_{\hat{a}\hat{b}}) A^{\hat{a}}_\mu A^{\hat{b}\mu} + \frac{1}{2}(D_\mu \xi_i)(D^\mu \xi_i)$$
$$+ \text{ Masseterme für } \eta(x) + \text{ höhere Ordnung WW}$$

Den Masseterm bekommt man aus

$$\frac{1}{2}(D^a_\mu v_i)(D^{a\mu} v_i) = \frac{1}{2} \underbrace{g^2 (i T_{ij}^{\hat{a}} v_j)(i T_{ik}^{\hat{b}} v_k)}_{(M^2)^{\hat{a}\hat{b}}} A^{\hat{a}}_\mu A^{\hat{b}\mu}$$

Zusammenfassung:

- die dim G - dim H Goldstonefelder sind verschwunden
  keine GB in Eichtheorien
- die n-(dim G - dim H) skalaren Felder verbleiben
  im Allg. massive Felder
- dim G - dim H Eichbosonen erhalten eine Masse 2+1 Freiheitsgrade
- die restlichen Eichbosonen bleiben masselos

insgesamt bleibt die Zahl der phys. Freiheitsgrade unverändert.