

Dirac Matrizen (γ^μ)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu$$

$$\leadsto \{\gamma^\mu, \gamma^\mu\} = 2\gamma^\mu \gamma^\mu = 2g^{\mu\mu}$$

$$\leadsto \gamma^\mu \gamma_\mu = g^\mu_\mu \Rightarrow \gamma^\mu \gamma_\mu = 4 \mathbb{1}_{4 \times 4} \quad g^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$$

$$\begin{aligned} \text{z.B. } \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu &= -\gamma^\mu \gamma_\mu \gamma_\nu + 2g_{\mu\nu} \gamma^\mu \\ &= -4\gamma_\nu + 2\gamma_\nu = -2\gamma_\nu \end{aligned}$$

Spuren von γ -Matrizen: $\text{tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = \text{tr}\{\gamma_\nu \gamma_\mu\}$

$$\bullet 2\text{tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = \text{tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu\} = \text{tr}\{\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}\}$$

$$= 2 \underbrace{\text{tr}\{\mathbb{1}_{4 \times 4}\}}_4 g_{\mu\nu}$$

$$\Leftrightarrow \text{tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = 4g_{\mu\nu} \quad \text{tr}\{\gamma_1 \gamma_2\} = 4\delta_1 \cdot \delta_2$$

$$\bullet \text{tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma\} \stackrel{\text{Zyklisch}}{=} \text{tr}\{\gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\mu\}$$

$$= \text{tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\rho\} + 2g_{\mu\nu} \text{tr}\{\gamma_\sigma \gamma_\rho\}$$

$$= +\text{tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma\} - 2g_{\mu\nu} \text{tr}\{\gamma_\rho \gamma_\sigma\} + 2g_{\mu\rho} \text{tr}\{\gamma_\nu \gamma_\sigma\}$$

$$= -\text{tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\rho\} + 2g_{\mu\nu} \text{tr}\{\gamma_\rho \gamma_\sigma\} - 2g_{\mu\nu} \text{tr}\{\gamma_\rho \gamma_\sigma\} + 2g_{\mu\rho} \text{tr}\{\gamma_\nu \gamma_\sigma\}$$

$$\Rightarrow \text{tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma\} = 4g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - 4g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + 4g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}$$

$$\text{tr}\{(2n+1)\gamma\} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\gamma_\mu\} &= \text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_5\} = \text{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_5\} = -\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_5\} \\ &= -\text{Tr}\{\gamma_\mu\} \end{aligned}$$

Higgs-Boson

koppelt über die Yukawa-Kopplung an die Fermionen

Für $H \rightarrow f\bar{f}$ Lindeit von Amplitude

$$M = -i m_f (G_F \sqrt{2})^{1/2} \bar{u}(p_2) v(p_1)$$

Im Higgs-Boson Ruhesystem $\hat{=} \text{CMS}$

$$p_1 = (\frac{1}{2} M_H, g \sin\theta, 0, g \cos\theta)$$

$$p_2 = (\frac{1}{2} M_H, -g \sin\theta, 0, g \cos\theta)$$

$$p_1^2 = p_2^2 = m_f^2$$

$$2) \quad g = \sqrt{\frac{1}{4} M_H^2 - m_f^2} \quad \leftarrow m_f < \frac{1}{2} M_H$$

$$|M|^2 = G_F m_f^2 \sqrt{2} \text{tr} \{ (\not{p}_1 + m_f)(\not{p}_2 - m_f) \}$$

$$= G_F m_f^2 \sqrt{2} \text{tr} \{ \not{p}_1 \not{p}_2 - m_f^2 \}$$

da $\text{tr} \{ \not{a} \not{b} \} = 0$

$$= 4 G_F m_f^2 \sqrt{2} (p_1 \cdot p_2 - m_f^2)$$

$$= 2 G_F m_f^2 M_H^2 \sqrt{2} (1 - 4 m_f^2 / M_H^2)$$

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{G_F m_f^2 M_H}{16 \pi^2 \sqrt{2}} N_c \left(1 - \frac{4 m_f^2}{M_H^2}\right)^{3/2}$$

$N_c = \begin{cases} 1 & \text{für Leptonen} \\ 3 & \text{für Quarks} \end{cases}$

$$\Gamma = \frac{G_F m_f^2 M_H}{4 \pi \sqrt{2}} N_c \left(1 - \frac{4 m_f^2}{M_H^2}\right)^{3/2}$$

Zerfall proportional zur Fermion-Masse

Higgs zerfällt hauptsächlich in das schwerste kinematisch verfügbare Fermion! $M_H \approx 125 \text{ GeV} \Rightarrow b\bar{b}$ Quarkpaar

H Spin 0 Teilchen $\Rightarrow \frac{d\Gamma}{d\Omega}$ ist winkelunabhängig!

Zerfälle in 2,0 Eichbosonen $x = \frac{M_W^2}{M_H^2}$

$$\Gamma(H \rightarrow W^+W^-) = \frac{G_F M_H^3}{32\pi\sqrt{2}} (1-x)^{1/2} (3x^2 - 4x + 4)$$

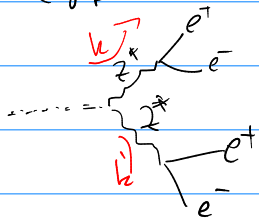
$$\Gamma(H \rightarrow ZZ) = \frac{G_F M_H^3}{64\pi\sqrt{2}} \frac{x}{x'} (1-x')^{1/2} (3x'^2 - 4x' - 4) \quad x' = \frac{M_Z^2}{M_H^2}$$

Zerfall von H in reelle W oder Z kinematisch nicht möglich

$$\text{Verhältnis } \Gamma(H \rightarrow W^+W^-) / \Gamma(H \rightarrow ZZ) = 2$$

dominant gegenüber den Zerfällen in ^{Eichbosone} Fermionen

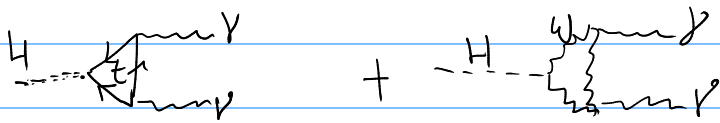
Zerfälle in virtuelle W oder Z sind erlaubt



$$\Rightarrow \frac{1}{k^2 - M_Z^2 - i\Gamma_Z M_Z}$$

für ausreichend große Γ_Z und nicht zu weit unter M_Z^2 relevanter Zerfallskanal

Weiterer wichtiger Zerfallskanal $H \rightarrow \gamma\gamma$



Hausaufgabe: $H \rightarrow \gamma\gamma$ ausrechnen!

Higgs-Produktion

LEP ($e^+e^- \rightarrow X$) $e^+e^- \rightarrow H \sim m_e^2$

$$e^+e^- \rightarrow Z^* \rightarrow ZZ$$

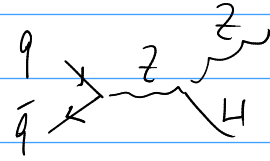


$$E(e^+e^-) > m_Z + m_H$$

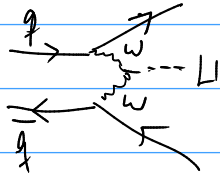
für LEP leider nicht realisierbar

—

PP, P \bar{P}
Tevatron
(Famili \bar{e} s)

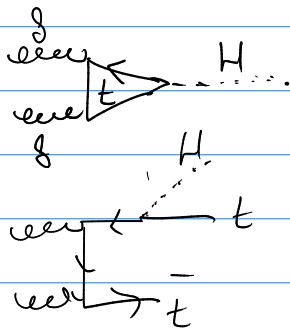


Z Strahlung



Weak (vector) Boson Scattering | VBF
| HBF

LLC
(CERN)



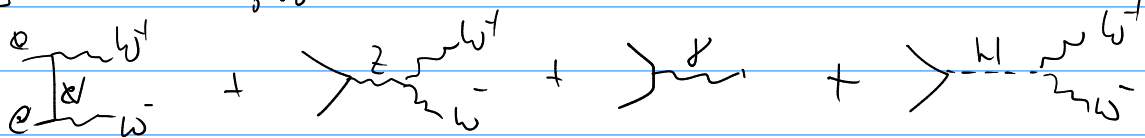
Gluon fusion

associated top production

Zusammenfassung!

Eichtheorie $SU(2) \times U(1)$ garantiert Unitarität

z.B. $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$



für masselose Elektronen ok.

Für massive Elektronen erhält man $\Gamma \propto m_e^2$

dieser Beitrag wird durch H Beitrag weggehoben

\Rightarrow insgesamt W^+W^- Erzeugung unitär.

Garantiert durch Eichinvarianz und m+kopplung an Higgs aus dem selben Mechanismus kommen.

Bedingungen für Higgs Masse

$$W_0^+ W_0^- \rightarrow W_0^+ W_0^-$$

Nähe Analyse (Partialwellen)

S-Partialwelle für hohe Energien

$$a_0(W_0^+ W_0^- \rightarrow W_0^+ W_0^-) \xrightarrow{S \gg m_W} \frac{-G_F M_H^2}{4\pi\sqrt{2}} \quad |a_0| \leq 1$$

$$\leadsto M_H^2 \leq 1,5 \text{ TeV}^2$$

$$+ \text{ weitere Kanäle} \Rightarrow M_H \leq 1 \text{ TeV}$$

Hadronischer Sektor des EW SM

→ 3 (N_c) linksständige Doublets für die Quarks

$$\begin{pmatrix} u_{red} \\ d_{red} \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} u_{green} \\ d_{green} \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} u_{blue} \\ d_{blue} \end{pmatrix}_L$$

schwacher Isospin $\pm \frac{1}{2}$

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}Y$$

$$Y(Q_L) = \frac{1}{3}$$

$$(u_{red})_R \ (d_{red})_R \ \dots \ (u_{blue})_R \ (d_{blue})_R$$

$$Y(u_R) = \frac{4}{3}$$

$$Y(d_R) = -\frac{2}{3}$$

$$Y = 2 \cdot Q$$

$$\tilde{\Phi} = i\sigma_2 \Phi^* \begin{pmatrix} \tilde{\phi}^+ \\ -\tilde{\phi}^- \end{pmatrix}$$

Yukawa Kopplung

$$\mathcal{L}_Y = -\sum_u \left[\bar{L} \tilde{\Phi} \right] u_R + \bar{u}_R \left(\tilde{\Phi}^+ L \right) \leftarrow \text{Möglichkeit für Neutrino Masse}$$

$$-\sum_d \left[\bar{L} b \right] d_R + \bar{d}_R \left(\Phi^+ L \right) \leftarrow \text{wie bei Elektronen (gel. Leptonen)}$$

Kopplung an W und Z

$$\mathcal{L}_W = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\bar{u} \gamma^\mu (1-\gamma_5) d W_\mu^+ + \bar{d} \gamma^\mu (1-\gamma_5) u W_\mu^- \right]$$

$$\mathcal{L}_Z = -\frac{g}{4\cos\theta_w} \left[\bar{u} \gamma^\mu \left((1-\gamma_5) T_3 - 4x_w Q \right) u Z_\mu + \bar{d} \gamma^\mu \left((1-\gamma_5) T_3 - 4x_w Q \right) d Z_\mu \right]$$

$$x_w = \sin^2 \theta_w$$

Pheno: Kuppelung von u nicht an d sondern an
eine Linearkombination $d_\theta = d \cos\theta_c + s \sin\theta_c$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ d_\theta \end{pmatrix}$$

Down-Quark

Strange Quark

$$\cos\theta_c = 0.97425$$

Cabibbo

Problem: Induziert Flavour changing neutral currents

Man erhält Term in Z WW

$$\sin\theta_c \cos\theta_c (\bar{d} \gamma^\mu (1-\gamma_5) s + \bar{s} \gamma^\mu (1-\gamma_5) d) Z_\mu$$

$$K^+ = \bar{u} \bar{v}$$

$$s \rightarrow \bar{d} \bar{u}$$

$$K_L \rightarrow \bar{u} \bar{u}$$

$$\bar{s} d \rightarrow \bar{u} \bar{u}$$

viel zu selten
um mit θ verknüpft
zu sein

$$d_\theta = \cos\theta_c d + \sin\theta_c s$$

$$s_\theta = \sin\theta_c d - \cos\theta_c s$$

$$s_\theta \neq d_\theta$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d_\theta \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} c \\ s_\theta \end{pmatrix}_L$$

Zweite Duplett eliminiert
die unerwünschte $\bar{s} d$ WW

Experimentell weitere Quark Familie $\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$

Verallgemeinerung auf (beliebig) viele Multiplikts

$$\Psi = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \\ \vdots \\ d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_+ = \frac{g}{2} (\bar{\Psi} \gamma^\mu (1-\gamma_5) \Theta \Psi)$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

koppelt up und down-
artige Quarks

4 Quark Theorie $V = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix}$

rotiert die "Masseneigenzustände" in "Flavour-eigenzustände"

bei 6 Quarks 3×3

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

CKM Matrix

Cabibbo, Kobayashi, Maskawa - Matrix

$$|V| = \begin{pmatrix} 0.974 & 0.224 & 0.004 \\ 0.218 & 0.997 & 0.042 \\ 0.008 & 0.039 & 1.019 \end{pmatrix} \pm 0.025$$

Für den neutralen Strom

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3^N &= \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \psi \\ &= \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \tau_3 \psi \end{aligned}$$

Diese Änderungen müssen auch auf Level der Yukawa Kopplung berücksichtigt werden

$$\mathcal{L}_Y = - \underbrace{\zeta_{ij}^u}_{\text{u}} (\bar{L}_{q_i} \tilde{\phi}) u_{jR} - \underbrace{\zeta_{ij}^d}_{\text{d}} (\bar{L}_{q_i} \phi) d_{jR} \quad \text{h.c.}$$

die Matrizen ζ_{ij}^u und ζ_{ij}^d lassen sich diagonalisieren mit einer unitären Transformation

$$M^f = V_L^f \left\{ \begin{array}{c} f \\ f \\ f \end{array} \right. V_R^{f\dagger}$$

anwenden der entsprechenden Transformation auf die Felder

CKM Matrix entspricht gerade $V = V_L^u V_L^{d\dagger}$

↳ Zählung: V hat 3 reelle Parameter + 1 Phase

2 Familien \rightarrow 1 Parameter (Cabibbo Winkel)

keine CP

3 Familien \rightarrow 3 Parameter + 1 Phase

Quelle für CP

Neutrino Sektor: Neutrino Oszillation

identisches Herangehensweise

PMNS Matrix

analog zur CKM Matrix

Pontercorvo, Maki, Nakagawa, Sakata

↳ Struktur komplett anders als im Quark Sektor

Zerfälle vom W^+ \rightarrow Leptonen oder Quarks

$$\Gamma(W^+ \rightarrow e^+ \nu_e) = \frac{G_F^2 M_W^3}{6\pi^2}$$

$$\Gamma(W^+ \rightarrow u \bar{d}) = 3 \sum_{N_c} |V_{ud}|^2 \Gamma(W^+ \rightarrow e^+ \nu_e)$$

$$\Gamma(W^+ \rightarrow u \bar{s}) = 3 \sum_{N_c} |V_{us}|^2 \Gamma(W^+ \rightarrow e^+ \nu_e)$$

$$\Gamma(W^+ \rightarrow \text{hadronen}) = 3 \sum_q \Gamma(W^+ \rightarrow e^+ \nu_e)$$

\sum_q : Zahl der Quarkdupletts

$D_e = \text{Zahl der Leptonenpluffs}$

$$\Gamma(W^+ \rightarrow \text{all}) = (D_e + 3D_q) \Gamma(W^+ \rightarrow l^+ \nu_e)$$

$\underbrace{\quad \quad \quad}_{9}$

$$\frac{\Gamma(W^+ \rightarrow l^+ \nu_e)}{\Gamma(W^+ \rightarrow \text{all})} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{\Gamma(W^+ \rightarrow \text{hadronen})}{\Gamma(W^+ \rightarrow \text{all})} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\Gamma(Z^0 \rightarrow l^+ l^-)}{\Gamma(Z^0 \rightarrow \text{all})} = 3,4\%$$

$$\frac{\Gamma(Z^0 \rightarrow \text{hadronen})}{\Gamma(Z^0 \rightarrow \text{all})} = 69,91\%$$

$$3 \frac{\Gamma(Z^0 \rightarrow \nu \bar{\nu})}{\Gamma(Z^0 \rightarrow \text{all})} = 20,1\% \quad \leftarrow \text{invisible}$$

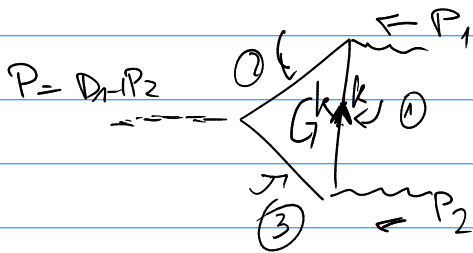
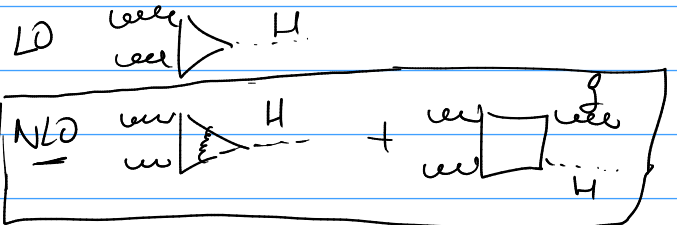
Hausaufgabe: $H \rightarrow \nu \bar{\nu}$

Radiative Korrekturen

Schleifenkorrekturen



reelle Abstrahlung



$$\int d^4k \frac{1}{(k^2 - \pi^2)} \frac{1}{(k + P_1)^2 - \pi^2} \frac{1}{(k - P_2)^2 - \pi^2}$$

empfindlich Integral $\int d^4k \frac{1}{(k^2 - \pi^2)} = \int d\Omega k^3 dk \frac{1}{(k^2 - \pi^2)} \quad \bigcirc$

k groß: $\int d\Omega \frac{k^3}{k^2} dk$ divergent für $k \rightarrow \infty$

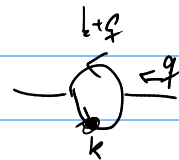
Divergenz für $k \rightarrow \infty$ UV-Divergenz
ultra-violett

weitere
Beispiel

$$\int d^4k \frac{1}{(k+q)^2 (k^2)^2}$$

$$= \int d\Omega k^3 \frac{1}{(k+q)^2 (k^2)^2} \quad \text{für } k \rightarrow 0$$

$$= \int d\Omega \frac{1}{k} dk \Rightarrow \text{divergent}$$



Divergenz für $k \rightarrow 0$ $\hat{=}$ infrarote Divergenz (IR)

UV Divergenze verschwinden durch
Renormierung

IR Divergenzen der virtuellen Diagramme haben
sich gegen Divergenz der realen Diagramme nach
Phasenraumintegration weg

Praktische Berechnung von Feynman Integralen

Regulator einführen, so dass man endliche Integrale erhält

Beste (praktisch) Variante dimensionale Regularisierung
4 Dimensionen $\rightarrow d = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen
Konvention

Einziges Integral, das man explizit in d -Dim. berechnen muss

$$\int d^d k e^{-k^2} = \pi^{d/2} \quad \Rightarrow \quad \int d^d k e^{-A k^2} = \left(\frac{\pi}{A}\right)^{d/2}$$

Anwendung $\frac{1}{(-k^2 + \pi^2)^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-(\pi^2 - k^2)t}$

folgt direkt aus Def der Γ Funktion

Schwinger
Parametrisierung

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}$$

$$\int d^d k \frac{1}{(-k^2 + \pi^2)^z} = \int_{-\infty}^{\infty} d^d k \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-(\pi^2 - k^2)t}$$

$$\Rightarrow \int d^d k \frac{1}{-k^2 + \pi^2} = i \pi^{d/2} \int_0^\infty dt t^{-d/2} e^{-\pi^2 t} = i \pi^{d/2} (\pi^2)^{d/2-1} \Gamma(-d/2 + 1)$$

Wo ist die Divergenz $\Gamma(-1/2 + 1)$
 $= \Gamma(-1 + \epsilon)$

hat Divergenz für $\epsilon \rightarrow 0$
Divergenz erscheint als $\frac{1}{\epsilon}$ Pol!

Alle Integrale der Form $\int d^d k \frac{1}{(k^2 - k^2)^2}$ können hiermit
berechnet werden!

Wie kommt man auf diese Form?

Feynman Parametrisierung

$$\frac{1}{\underbrace{D_1^{n_1} \dots D_N^{n_N}}_{\text{Produkt}}} = \frac{\Gamma(\sum n_i)}{\Gamma(n_1) \dots \Gamma(n_N)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_N \frac{\delta(\sum x_i - 1) \prod x_i^{n_i - 1}}{\underbrace{(\sum x_i D_i)_{\epsilon}}_{\text{Summe}}}$$

läßt sich in die
Form $k^2 - k^2$ bringen