

Prof. Dr. O. Sander
Dr. H. Hardering

WS 2017/18

PDENM

1. Übungsblatt: 13.10.2017

Bitte geben Sie das bearbeitete Aufgabenblatt bis zum 23.10.2017 9:20 Uhr entweder in der Vorlesung, in Büro C311 oder im Briefkasten der Veranstaltung ab.

Aufgabe 1: Richtig oder falsch? Das Ziel dieser Aufgabe ist es, einige Inhalte der Vorlesungen zu rekapitulieren und zum Wiederholen der erlernten Grundbegriffe anzuregen.

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Bitte geben Sie eine kurze(!) Begründung.

1. Für die meisten partiellen Differentialgleichungen ist es nicht möglich explizite Lösungsformeln auszuschreiben. (Ohne Begründung)
2. Physikalische Probleme sind stets eindeutig lösbar. Daher sollte eine modellierende partielle Differentialgleichung dies auch sein.
3. Ein numerisches Verfahren konvergiert, wenn es konsistent und stabil ist.
4. Eine schlechte Kondition der Diskretisierungsmatrix wirkt sich negativ auf den Konsistenzfehler aus.
5. Da in endlich dimensional Räumen alle Normen äquivalent sind, müssen wir nicht darauf achten, in welcher Norm wir Diskretisierungsfehler angeben.

2P

Aufgabe 2: Transport- und Burgersgleichung

1. Wir betrachten die Transportgleichung mit Anfangswerten

$$\begin{aligned} u_t + b u_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}, \end{aligned}$$

wobei $b \in \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bekannt sind.

Zeigen Sie, dass eine Lösung u der Transportgleichung konstant auf Geraden der Form $s \mapsto (x + sb, t + s)$ ist. Diese Geraden nennt man Charakteristiken. Leiten Sie daraus und aus den Anfangsdaten eine Lösungsformel für u her.

2. Wir betrachten Burgersgleichung

$$\begin{aligned} u_t + u u_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}, \end{aligned}$$

wobei g eine glatte Funktion ist.

Zeigen Sie, dass eine Lösung u der Burgersgleichung konstant auf Charakteristiken

$s \mapsto (x(s), s)$ ist, welche $x'(s) = u(x(s), s)$ erfüllen und dass diese Geraden sind, welche von den Anfangsdaten g abhängen. Zeigen Sie, dass, falls ein x existiert, sodass $g'(x) < 0$ gilt, sich die Charakteristiken zum Zeitpunkt

$$T = \frac{-1}{\min g'(x)}$$

zum ersten Mal kreuzen, sodass sich dort ein Schock bildet.

4P

Aufgabe 3: Finite Differenzen Sei v eine ausreichend glatte Funktion und $v_i = v(x_i)$, wobei $x_i = ih$ für $i = 0, \dots, n$, $h = \frac{1}{n}$. Wir definieren

$$\begin{aligned} v_{x,i} &:= \frac{v_{i+1} - v_i}{h} && \text{– Vorwärtsdifferenz} \\ v_{\bar{x},i} &:= \frac{v_i - v_{i-1}}{h} && \text{– Rückwärtsdifferenz} \\ v_{\hat{x},i} &:= \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} && \text{– Zentraldifferenz} \\ v_{\bar{x}x,i} &:= \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} && \text{– Differenz zweiter Ordnung.} \end{aligned}$$

Zeigen Sie

$$\begin{aligned} v_{\hat{x},i} &= \frac{1}{2}(v_{x,i} + v_{\bar{x},i}), & v_{\bar{x}x,i} &= (v_{\bar{x},i})_{x,i}, \\ v_{\hat{x},i} &= v'(x_i) + O(h^2), & v_{\bar{x}x,i} &= v''(x_i) + O(h^2). \end{aligned}$$

Was bedeutet „ausreichend glatt“?

4P

Aufgabe 4: Das diskrete Maximumsprinzip Lösungen der Laplacegleichung $-\Delta u = 0$ werden harmonische Funktionen genannt. Diese (und Lösungen verwandter partieller Differentialgleichungen) erfüllen sogenannte Maximumsprinzipien. Das schwache Maximumsprinzip besagt, dass für harmonische Funktionen $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$$

gilt, d.h., sie nehmen ihr Maximum auf dem Rand von Ω an. Maximumsprinzipien werden in der Theorie partieller Differentialgleichungen dazu benutzt eine Vielzahl von Resultaten zu beweisen. Die Approximation durch finite Differenzen erfüllt ein diskretes Analogon dieses Maximumsprinzips.

Insbesondere gilt für die Fünfpunktsternapproximation L_h des Laplaceoperators in 2-d, dass, wenn u nicht konstant auf Ω_h ist und $L_h u \leq 0$ in Ω_h gilt, u dann kein positives Maximum in Ω_h besitzt.

Zeigen Sie, dass daraus auch folgendes Vergleichsprinzip folgt:

Sei

$$\begin{aligned} L_h u(x) &= f(x) & \text{für } x \in \Omega_h & & u(x) &= g(x) & \text{für } x \in \partial\Omega_h \\ L_h \bar{u}(x) &= \bar{f}(x) & \text{für } x \in \Omega_h & & \bar{u}(x) &= \bar{g}(x) & \text{für } x \in \partial\Omega_h, \end{aligned}$$

mit $|f(x)| \leq \bar{f}(x)$ und $|g(x)| \leq \bar{g}(x)$. Dann gilt $|u(x)| \leq \bar{u}(x)$ für alle $x \in \bar{\Omega}_h$.

3P

Aufgabe 5: Programmieraufgabe Die Programmieraufgabe finden Sie als IPython Notebook auf der Vorlesungsseite (Opal). Bitte bearbeiten Sie auch diese und schicken Sie Ihre Lösungen an ansgar.burchardt@tu-dresden.de.

7P