

Prof. Dr. O. Sander
 Dr. H. Hardering

WS 2017/18

PDENM

2. Übungsblatt: 27.10.2017

Bitte geben Sie das bearbeitete Aufgabenblatt bis zum 14.11.2017 im Briefkasten der Veranstaltung ab.

Aufgabe 1: Finite Differenzen oder Finite Elemente

1. Sei $f \in C(\bar{I})$, wobei $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Nehmen Sie an, dass $u \in C^2(\bar{I})$ eine Lösung von

$$-\Delta u = f, \quad u|_{\{a,b\}} = 0$$

ist. Sei weiter $N \in \mathbb{N}$ und $h := \frac{b-a}{N}$. Für alle $i \in \{0, \dots, N\}$ setzen Sie $x_i := a + ih$ und für alle $i \in \{1, \dots, N\}$

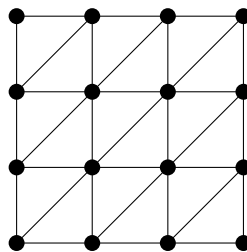
$$\lambda_i : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{i-1}) & \text{für } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{1}{h}(x_{i+1} - x) & \text{für } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{für } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$-\Delta_h u(x_i) := -\frac{1}{h^2}(u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})) = \frac{\int_I f(x)\lambda_i(x) dx}{\int_I \lambda_i(x) dx}$$

gilt.

2. Betrachten Sie nun die Poissongleichung im Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^2$ und triangulieren Sie dieses nach dem folgenden Schema:



Wir diskretisieren die Gleichung im Raum der linearen finiten Elemente

$$S_h := \{v \in C(\bar{\Omega}) \mid v \text{ ist in jedem Dreieck linear und } v = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Diese Diskretisierung führt auf ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$, wobei A durch

$$a_{ij} := \int_{\Omega} \nabla \lambda_i(x) \cdot \nabla \lambda_j(x) dx$$

definiert ist. Zeigen Sie, dass Sie bei geeigneter Nummerierung ein Gleichungssystem mit genau derselben Matrix wie beim Differenzenverfahren mit dem Standard-5-Punkte-Stern erhalten.

6P

Aufgabe 2: Klassische Lösungen sind nicht C^1 auf dem Rand Man betrachte ein zweidimensionales Gebiet mit einspringender Ecke

$$\Omega = \left\{ (r, \phi) \mid r \in (0, 1), \phi \in \left(0, \frac{3}{2}\pi\right) \right\}.$$

Transformieren Sie den Laplace-Operator auf Polarkoordinaten und lösen Sie die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u(e^{i\phi}) &= \sin\left(\frac{2}{3}\phi\right) && \text{für } 0 \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2}, \\ u &= 0 && \text{sonst auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie nun, dass $u \notin C^1(\bar{\Omega})$ gilt.

Aufgabe 3: Interpolationsungleichung Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz Rand und $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass für jedes $\epsilon > 0$

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \epsilon \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

gilt. Bitte benennen Sie in jedem Schritt die verwendeten Theoreme und Ungleichungen.

Erinnerung: Der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen $L^2(\Omega)$ besteht aus (Äquivalenzklassen von) messbaren Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, für welche

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} f^2(x) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Die Räume $H^k(\Omega)$ bestehen aus jenen Funktionen, deren gemischte partielle schwache Ableitungen bis zur Ordnung k in $L^2(\Omega)$ liegen, und sind versehen mit der Norm

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Der Raum $H_0^1(\Omega)$ ist der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$.

3P

Aufgabe 4: Stückweise glatte Funktionen Seien Ω , T_1 und T_2 drei offene, beschränkte Gebiete in \mathbb{R}^n mit $\bar{\Omega} = \bar{T}_1 \cup \bar{T}_2$ und $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Sei u eine Funktion auf Ω , sodass $u|_{T_1} \in C^1(T_1) \cap H^1(T_1)$ und $u|_{T_2} \in C^1(T_2) \cap H^1(T_2)$. Zeigen Sie, dass $u \in H^1(\Omega)$ genau dann, wenn $u \in C(\Omega)$.

3P

Aufgabe 5: Programmieraufgabe Die Programmieraufgabe finden Sie als IPython Notebook auf der Vorlesungsseite (Opal). Bitte bearbeiten Sie auch diese.

8P