

Prof. Dr. O. Sander
Dr. H. Hardering

WS 2017/18

PDENM

3. Übungsblatt: 14.11.2017

Bitte geben Sie das bearbeitete Aufgabenblatt bis zum 28.11.2017 im Briefkasten der Veranstaltung ab.

Aufgabe 1: Lineare Algebra Seien V und W euklidische Räume.

1. Zeigen Sie, dass $a : (w, v) \mapsto (Aw, v)_V$ koerzitiv ist, wenn A positiv definit ist.
2. Zeigen Sie, dass $a : (w, v) \mapsto (Aw, v)_V$ genau dann die Bedingungen des Banach–Nečas–Babuška Theorems

$$\exists \alpha > 0, \quad \inf_{w \in W} \sup_{v \in V} \frac{a(w, v)}{\|w\| \|v\|} \geq \alpha, \quad (1)$$

$$\forall v \in V, \quad (\forall w \in V, \quad a(w, v) = 0) \Rightarrow (v = 0) \quad (2)$$

erfüllt, wenn A invertierbar ist.

3. Zeigen Sie, dass α in der inf-sup Bedingung dem kleinsten Singulärwert von A entspricht.

3P

Aufgabe 2: Friedrichsche Ungleichung Sei Ω in einem n -dimensionalen Würfel der Kantenlänge s enthalten. Beweisen Sie, dass für alle $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq s \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

gilt.

2P

Aufgabe 3: Stokes Problem Leiten Sie eine schwache Formulierung des Stokes Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f && \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ \operatorname{div} u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

im Raum $(u, p) \in [H_0^1(\Omega)]^d \times L_{f=0}^2(\Omega)$ her, wobei

$$L_{f=0}^2(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} v \, dx = 0 \right\}.$$

Zeigen Sie dann, dass diese die inf-sup Bedingung erfüllt.

4P

Aufgabe 4: Alternativer Beweis des Lemmas von Lax–Milgram Das Ziel der Aufgabe ist es das Lax–Milgram Lemma ohne die Verwendung des Satzes von Banach–Nečas–Babuška zu beweisen.

Sei V ein Hilbertraum, a eine koerzitive Bilinearform auf V und $f \in V'$. Definiere $A : V \rightarrow V'$ durch $Au = a(u, \cdot)$.

1. Zeigen Sie, dass aus der Koerzitivität von A die Ungleichung $\|Au\|_{V'} \geq \alpha \|u\|_V$.
2. Zeigen Sie, dass A injektiv ist mit abgeschlossenem Bild $\text{Im}(A)$.
3. Zeigen Sie, dass $\text{Im}(A)$ dicht in V' liegt.
4. Schließen Sie auf die Aussagen des Lax–Milgram Lemmas.

4P

Aufgabe 5: Programmieraufgabe Die Programmieraufgabe finden Sie als IPython Notebook auf der Vorlesungsseite (Opal). Bitte bearbeiten Sie auch diese.

7P