

Prof. Dr. O. Sander
Dr. H. Hardering

WS 2017/18

PDENM

4. Übungsblatt: 01.12.2017

Bitte geben Sie das bearbeitete Aufgabenblatt bis zum 12.12.2017 im Briefkasten der Veranstaltung ab.

Aufgabe 1: Céa-Lemma mit anderer Konstante Sei $E : V \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $E(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - l(v)$ mit einer V -elliptischen Bilinearform a mit Elliptizitätskonstante λ und oberer Schranke Λ . Seien ferner u und u_h Minimierer von E in V bzw. in $V_h \subset V$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\|u - u_h\| \leq \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

Hinweis: Leiten Sie die Formel

$$E(u) - E(v) = \int_0^1 (1-t)a(v-u, v-u) dt$$

für alle $v \in V$ her.

3P

Aufgabe 2: Céa-Lemma für ein quasilineares Problem Betrachten Sie die Energie $E(v) := \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla v(x)|^2} dx$ auf dem Raum $V := H_{0,M}^1 := \{v \in H_0^1(\Omega) : \|\nabla v\|_{L^\infty} \leq M\}$. Seien u und u_h Minimierer von E in V bzw. in $V_h \subset V$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \leq \sqrt{1 + M^2} \inf_{v_h \in V_h} \|\nabla(u - v_h)\|_{L^2}.$$

3P

Aufgabe 3: L^2 -Fehler mit approximativer Energie Betrachten Sie die Variationsprobleme

$$\begin{aligned} a(u, v) &= l(v) & \forall v \in V \\ a_h(u_h, v_h) &= l_h(v_h) & \forall v_h \in V_h \subset V. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass unter den Annahmen des Aubin–Nitsche Lemmas gilt

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C h^2 \|u\|_{H^2} + C \sup_{v_h \in V_h} \frac{|l(v_h) - a_h(u_h, v_h)|}{\|v_h\|_{H^1}}.$$

3P

Aufgabe 4: Quadraturfehler Betrachten Sie das elliptische Modellproblem

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1.$$

Dieses wird nun mit finiten Elementen k -ter Ordnung diskretisiert, wobei die Bilinearform a und das Funktional l jeweils durch Quadraturformeln mit positiven Gewichten approximiert werden. Bis zu welcher Polynomordnung müssen diese Quadraturformeln exakt sein, damit die resultierende approximative Bilinearform a_h elliptisch ist?

3P

Aufgabe 5: Programmieraufgabe Die Programmieraufgabe finden Sie als IPython Notebook auf der Vorlesungsseite (Opal). Bitte bearbeiten Sie auch diese.

8P