

Prof. Dr. O. Sander
Dr. H. Hardering

WS 2017/18

PDENM

6. Übungsblatt: 12.01.2018

Bitte geben Sie das bearbeitete Aufgabenblatt bis zum 25.01.2018 im Briefkasten der Veranstaltung ab.

Aufgabe 1: Inverse Abschätzungen Seien $0 \leq l \leq k$ natürliche Zahlen und $p < q \in [1, \infty]$. Zeigen Sie, dass für FE-Funktionen v_h

$$\|D^k v_h\|_{L^q} \leq C h^{-(k-l)-d(p^{-1}-q^{-1})} \|D^l v_h\|_{L^p}$$

gilt.

5P

Aufgabe 2: Clément-Interpolation Für jeden Gitterpunkt V_i einer Triangulierung eines Gebietes Ω sei ω_i die Vereinigung aller Dreiecke, welche V_i als Ecke enthalten. Sei $v \in L^1(\Omega)$ und $P_1(\omega_i)$ der Raum aller stetigen, stückweise linearen Finiten Elemente auf ω_i . Sei $p_i \in P_1(\omega_i)$ die lokale L^2 -Projektion von $v|_{\omega_i}$, d.h.

$$(v - p_i, q)_{L^2(\omega_i)} = 0 \quad \forall q \in P_1(\omega_i).$$

Der Clément-Interpolationsoperator $P_{Cle}^h : L^1(\Omega) \rightarrow P_1(\Omega)$ ist dann definiert durch

$$P_{Cle}^h v(x) = \sum_i p_i(V_i) \phi_i^h(x),$$

wobei ϕ_i^h die Standardbasis des globalen Finite-Elemente-Raums $P_1(\Omega)$ ist.

1. Sei $\Omega = (0, 1)$ gleichmäßig unterteilt in Intervalle der Länge $h = \frac{1}{4}$. Berechnen Sie die Clément-Interpolation der Funktion v gegeben durch

$$v(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (0, \frac{1}{4}) \\ 1 & x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ 0 & x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ -\frac{1}{2} & x \in (\frac{3}{4}, 1). \end{cases}$$

2. Seien $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $k \leq l \leq 2$, $1 \leq q \leq \infty$. Sei T ein Element der Triangulierung und ω_T die Vereinigung aller ω_i , welche T als Teilmenge enthalten. Zeigen Sie, dass für alle $v \in W^{l,q}(\omega_T)$ die Abschätzung

$$\|D^k(v - P_{Cle}^h v)\|_{L^q(T)} \leq h_T^{l-k} \|D^l v\|_{L^q(\omega_T)}$$

gilt, wobei $h_T = \text{diam}(\omega_T)$ ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- (a) Machen Sie sich klar, dass der Interpolationsoperator tatsächlich wohldefiniert ist und zeigen Sie die Aussage für $k = l = 2$.
 (b) Zeigen Sie, dass P_{Cle}^h ein konsistenter Operator ist, d.h. dass

$$P_{Cle}^h p = p \quad \text{in } T \quad \forall p \in P_1(\omega_T)$$

gilt.

- (c) Zeigen Sie mit Hilfe inverser Abschätzungen (siehe Aufgabe 1), dass

$$|p_i(V_i)| \leq ch^{-\frac{d}{q}} \|v\|_{L^q(\omega_i)}$$

für alle $V_i \in T$ gilt.

- (d) Folgern Sie die Stabilität von P_{Cle}^h , d.h.

$$\|D^k P_{Cle}^h v\|_{L^q(T)} \leq C h^{-k} \|v\|_{L^q(\omega_T)}.$$

- (e) Zeigen Sie, dass ein Polynom $p \in P_1(\omega_T)$ existiert, sodass

$$\|D^j(v - p)\|_{L^q(T)} \leq h^{l-j} \|D^l v\|_{L^q(\omega_T)} \quad \text{für } 0 \leq j \leq l \leq 2$$

gilt. Nutzen Sie dieses zusammen mit den vorherigen Schritten um die Interpolationsfehleraussage zu beweisen.

4 + 8P

Aufgabe 3: Die Saturationsbedingung

1. Sei u_h eine FE-Lösung einer elliptischen Gleichung und v_h eine FE-Lösung in einem größeren Raum, sodass die Saturationsbedingung gilt, d.h. sodass ein $\beta < 1$ existiert mit

$$\|v_h - u\| \leq \beta \|u_h - u\|.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\|u_h - v_h\| \leq \|u - u_h\| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \|u_h - v_h\|$$

gilt.

2. Konstruieren Sie ein Beispiel, sodass die Saturationsbedingung verletzt ist. Genauer: Seien $V_1 \subset V_2 \subset H_0^1(\Omega)$, wobei die Räume paarweise ungleich sein sollen. Konstruieren Sie ein $f \in H^{-1}(\Omega)$ so dass die FE-Lösungen zur Poisson-Gleichung für V_1 und V_2 zusammenfallen, aber nicht Lösungen des kontinuierlichen Problems sind.

6P

Aufgabe 5: Programmieraufgabe Die Programmieraufgabe finden Sie als IPython Notebook auf der Vorlesungsseite (Opal). Bitte bearbeiten Sie auch diese.

7P