

Teilchen- und Kernphysik WS 2018/19

M. Kobel, K. Danziger, L. Wüst, O. Novgorodowa

Übung 6, Ausgabe 15.11.2018

1 Anwesenheitsübung

1.1 Paritätsverhalten des Vektorstroms

In der Quantenfeldtheorie ist der Operator der Raumspiegelung (Parität) für Dirac-Spinoren gegeben durch

$$\mathcal{P}(\psi(\vec{r}, t) := \psi(-\vec{r}, t) = \gamma^0 \psi.$$

Welches Verhalten erwarten Sie für die einzelnen Komponenten $\mu = 0, 1, 2, 3$ der 'Vektorstrom'-Dichte $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ unter Raumspiegelung? Verifizieren Sie dies explizit für eine Komponente (z.B. $\mu=3$) und schließen Sie daraus auf die anderen Komponenten.

2 Hausaufgaben

2.1 Helizität und Chiralität der Basislösungen der DIRAC Gleichung

Die DIRAC Gleichung für freie Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen lautet

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (1)$$

Als ein mögliches Set von 4 Basislösungen findet man

$$\psi^{(1,2)}(p_\mu, x^\mu) = u^{(1,2)}(p_\mu) e^{-ip_\mu x^\mu} \quad (2)$$

$$\psi^{(3,4)}(p_\mu, x^\mu) = v^{(1,2)}(p_\mu) e^{+ip_\mu x^\mu} \quad (3)$$

wobei ausgedrückt mit $\chi^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\chi^{(2)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{\sigma} := \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$ sich die ortsunabhängigen Teilchen-Spinoren u und Antiteilchen-Spinoren v ergeben zu

$$u^{(1,2)} = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi^{(1,2)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{(1,2)} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$v^{(1,2)} = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{(1,2)} \\ \chi^{(1,2)} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Im Folgenden sollen "Helizität" und "Chiralität" dieser Lösungen näher beleuchtet werden. Die einzelnen Teilaufgaben sind dabei völlig unabhängig voneinander bearbeitbar.

Für die Wahl $\vec{p} = (0, 0, p)$ soll gezeigt werden, dass die obigen Basislösungen eine definierte Helizität besitzen (Anm: Da der Helizitätsoperator mit dem Hamiltonoperator vertauscht, lassen sich Basislösungen mit definierter Helizität für jede Wahl von $\vec{p}$ finden)

- Zeigen Sie zunächst, dass sich die Lösungen für $\vec{p} = (0, 0, p)$ schreiben lassen als

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \\ 0 \\ \sqrt{E-m} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E+m} \\ 0 \\ -\sqrt{E-m} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{E-m} \\ 0 \\ \sqrt{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{E-m} \\ 0 \\ \sqrt{E+m} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

- Wie sieht der Helizitätsoperator $\hat{h} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix}$ in diesem Fall aus, wobei $\vec{p} := \vec{p}/|\vec{p}|$ den Einheitsvektor in Impulsrichtung bezeichnet?
- Welche Helizitäten haben die Lösungen $u^{(1)}, u^{(2)}, v^{(1)}, v^{(2)}$?
- Ein Spinor heißt links-chiral wenn $\gamma^5 u = -u$, und rechts-chiral, wenn $\gamma^5 u = u$. Besitzen die beiden Spinoren $u^{(1)}, u^{(2)}, v^{(1)}, v^{(2)}$ aus Gleichung (6) eine definierte Chiralität?
- Zeigen Sie, dass sich dies im Grenzfall $m \ll E$ ändert, und vergleichen Sie Chiralität und Helizität.

2.2 Zusammenhang zwischen Chiralität und Helizität

Es soll im Folgenden die mittlere Helizität rein links-chiraler Teilchen (wie sie z.B. in der schwachen Wechselwirkung produziert werden) als Funktion ihrer Geschwindigkeit β berechnet werden.

- Berechnen Sie zunächst die links-chirale Projektion $P_L u^{(i)} = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u^{(i)}$ der beiden Spinoren $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ aus Gleichung (6).
- Welche Helizität haben $P_L u^{(1)}$ und $P_L u^{(2)}$? Verwenden Sie zur Lösung den oben hergeleiteten Helizitätsoperator.
- Zeigen Sie, dass das Spinor-Betragsquadrat $|u|^2 := \sum_{i=1}^4 |u_i|^2$ die 0-te Komponente der 4-er Stromdichte $j^\mu = \bar{u}\gamma^\mu u$ ist, und damit als (unnormierte) Wahrscheinlichkeitsdichte aufgefasst werden kann.
- Für rein links-chirale Teilchen $u_L := (P_L u^{(1)} + P_L u^{(2)})\sqrt{2}$ ist die Wahrscheinlichkeit $P_{h=+1}$, die Helizität $h = +1$ zu messen, daher gegeben durch

$$P_{h=+1} = \frac{|P_L u^{(1)}|^2}{|P_L u^{(1)}|^2 + |P_L u^{(2)}|^2}, \quad (8)$$

wobei der Nenner die Normierung sicherstellt.

Wie groß sind $P_{h=+1}$ und $P_{h=-1}$? Verifizieren Sie damit die linke Spalte der folgenden Tabelle

$P_{h=\dots}$	u_L	u_R
-1	$(1 + \beta)/2$	$(1 - \beta)/2$
+1	$(1 - \beta)/2$	$(1 + \beta)/2$

und diskutieren Sie die Grenzfälle $\beta \rightarrow 0$ und $\beta \rightarrow 1$.

- Berechnen Sie für die beiden folgenden quantitativen Beispiele von rein links-chiralen Teilchen die Wahrscheinlichkeit, die Helizität $h = +1$ zu messen:
 - Ein Elektron der Masse 0,51 MeV aus dem Betazerfall des Neutrons mit $E_{\text{kin}}=0,34$ MeV.
 - Ein Neutrino der Masse 0,051 eV aus der Kernfusion in der Sonne mit $E_{\text{kin}}=0,34$ MeV.
(Verwenden Sie geeignete Näherungen zur Vereinfachung der Rechnung)
- Berechnen Sie abschließend die mittlere Helizität $\langle h \rangle$ eines rein links-chiralen Teilchens.

2.3 Links- und Rechts-chirale adjungierte Spinoren

In der Vorlesung hatten Sie gesehen, dass sich jeder Spinor mit Hilfe von Projektionsoperatoren in einen links-chiralen und einen rechts-chiralen Anteil zerlegen lässt:

$$u_R := \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)u \quad (9)$$

$$u_L := \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5)u \quad (10)$$

- Vereinfachen Sie möglichst elegant, d.h. ohne explizites Einsetzen die Ausdrücke

a) $\frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5)\frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)$ und

b) $\frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)\frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)$

Warum beweisen diese Ergebnisse, dass es sich in der Tat um Projektionsoperatoren handelt?

- Für adjungierte Spinoren (zur Erinnerung $\tilde{u} := u^\dagger \gamma^0$) gelten die Definitionen

$$\tilde{u}_R := \tilde{u} \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \quad (11)$$

$$\tilde{u}_L := \tilde{u} \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \quad (12)$$

Beachten Sie die vertauschten Vorzeichen und Reihenfolge! Bestätigen Sie nun, dass die oben definierten Projektionen auf die chiralen Zustände mit der Adjungierung vertauschen und begründen Sie die benötigte Vertauschungsregel zwischen γ^5 und $\gamma^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$ aus den Vertauschungsregeln für $\gamma^\mu \gamma^\nu$.

$$(\tilde{u})_R = \widetilde{u_R}$$

$$(\tilde{u})_L = \widetilde{u_L}$$

- und verifizieren Sie die Eigenwertbeziehungen (warum muss man γ^5 mitadjungieren?)

$$\widetilde{\gamma^5 u_R} = \widetilde{u_R}$$

$$\widetilde{\gamma^5 u_L} = -\widetilde{u_L}$$