

Übung 6, Ausgabe 22.11.2018

1 Anwesenheitsübung

1.1 Resonanzen

Begründen Sie, warum es keine Resonanzen bei virtuellen Teilchen im t - und u -Kanal gibt. Betrachten Sie dazu noch einmal die Resonanzbedingung im s -Kanal und vergleichen Sie diese mit dem t - und u -Kanal. (Es genügt dabei, den Nenner der inneren Linien ("Propagatoren") von stabilen Teilchen ($\Gamma=0$) zu betrachten, so wie in der Vorlesung gelistet.) In welchem q^2 Gebiet ist der Propagator im t - und u -Kanal groß, d.h. höchstens einen Faktor 2 kleiner als im Maximum?

2 Hausaufgaben

2.1 Chiralitätserhaltung in der QED

1. Der Basisvertex der QED besitzt in der Lagrangedichte z.B. für den Elektron-Photon Vertex folgenden Ausdruck

$$\tilde{e}(ie\gamma^\mu)eA_\mu = (\tilde{e}_L + \tilde{e}_R)(ie\gamma^\mu)(e_L + e_R)A_\mu, \quad (1)$$

wobei e für den Dirac-Spinor des Elektrons und e für die elektromagnetische Kopplungsstärke steht. Zeigen Sie durch Ausmultiplizieren unter Verwendung der entsprechenden Projektionsoperatoren, dass dieser Vertex die Chiralität erhält, d.h. dass dieser Ausdruck geschrieben werden kann als

$$\tilde{e}_L(ie\gamma^\mu)e_L A_\mu + \tilde{e}_R(ie\gamma^\mu)e_R A_\mu. \quad (2)$$

2. Die gesamte LAGRANGE-Dichte der QED lautet

$$\mathcal{L} = \tilde{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\tilde{\psi}\gamma^\mu Z\psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (3)$$

wobei e für die elektromagnetische Kopplungsstärke steht. Für das Beispiel eines Elektrons $\psi=e$ hat der Massenterm die folgende Form

$$m_e\tilde{e}e = m_e(\tilde{e}_L + \tilde{e}_R)(e_L + e_R). \quad (4)$$

wobei e für den Dirac-Spinor des Elektrons steht. Zeigen Sie unter Verwendung der entsprechenden Projektionsoperatoren, dass sich dieser Ausdruck schreiben lässt als

$$m_e(\tilde{e}_L e_R + \tilde{e}_R e_L). \quad (5)$$

2.2 Die Masse der Photonen

Die Forderung nach lokaler Eichinvarianz führt auf das Eichfeld A_μ , welches an die Ladungszahl Z mit der Kopplungsstärke e koppelt und somit als das Photonfeld aufgefasst werden kann. Daher muss der LAGRANGE-Dichte noch ein Term hinzugefügt werden, der die kinetische Energie des Photonfeldes beschreibt

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{interaction} + \mathcal{L}_{photon} = \mathcal{L}_{interaction} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

wobei $F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ gilt.

- Zeigen Sie, dass jeder Faktor $F_{\mu\nu}$ im Ausdruck $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ invariant ist unter lokalen Eichtransformationen.
- Zeigen Sie, dass ein denkbarer Massenterm für das Photonfeld

$$\mathcal{L}_{Masse} = -\frac{1}{2}m_\gamma^2 A_\mu A^\mu \quad (6)$$

die lokale Eichinvarianz zerstören würde. Das Photon muss daher zwingend masselos sein.

- Schließen sie aus dem vorigen Ergebnis, ob der Wechselwirkungsterm

$$\mathcal{L} = e^2 \bar{\psi} \psi A_\mu A^\mu \quad (7)$$

lokal eichinvariant wäre. Welchem Vertex würde er entsprechen?

Aus den obigen Überlegungen erhält man als einzig mögliche LAGRANGE-Dichte der QED

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu Z\psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (8)$$

Diskutieren Sie noch einmal die Bedeutung der einzelnen Terme.

2.3 Crossing Symmetrie

Das Quadrat der Feynmanamplitude für den Prozess $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ist

$$|\mathcal{M}|^2 = 2e^4 \frac{u^2 + t^2}{s^2},$$

und hängt über $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{p_i^*}{p_f^*} |\mathcal{M}|^2$ mit dem differentiellen Wirkungsquerschnitt zusammen.

- Zeichnen Sie die Feynman-Diagramme für die Prozesse (i) $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, (ii) $\mu^+e^- \rightarrow \mu^+e^-$, und (iii) $\mu^-e^- \rightarrow \mu^-e^-$
- Zeigen Sie, dass durch Vertauschen zweier ein- und auslaufender Teilchen der Prozess (ii) aus Prozess (i) hervorgeht. Wie verändern sich durch dieses "crossing" die Mandelstam-Variablen s , t und u ? Erschließen Sie daraus das Quadrat der Feynmanamplitude für $\mu^+e^- \rightarrow \mu^+e^-$.
- Gehen Sie nun von (ii) $\mu^+e^- \rightarrow \mu^+e^-$ aus, um zu $|\mathcal{M}|^2$ für (iii) $\mu^-e^- \rightarrow \mu^-e^-$ zu gelangen. Was fällt an dem Ergebnis auf?
- Drücken Sie $|\mathcal{M}|^2$ für (i) und (ii) als Funktionen des Streuwinkels θ^* aus und skizzieren Sie diese in Abhängigkeit von $\cos\theta^*$. (Verwenden Sie dabei die hochrelativistischen Ausdrücke für s , t und u).