

Teilchen- und Kernphysik WS 2018/19

M. Kobel, K. Danziger, L. Wüst, O. Novgorodowa

Übung 9, Ausgabe 06.12.2018

1 Anwesenheitsübung

1.1 Anregung zur Diskussion

Was würde mit Wasserstoffatomen geschehen, wenn die Massendifferenz zwischen Neutron und Proton statt 1,3 MeV nur 0,5 MeV oder weniger betragen würde? Betrachten Sie dazu einen t -Kanal Austausch eines W -Bosons zwischen Proton und Elektron.

2 Hausaufgaben

2.1 Zerfälle der Δ -Baryonen

Die Δ -Baryonen mit einer Masse von 1232 MeV sind genau wie Protonen und Neutronen nur aus u - und d -Quarks aufgebaut, allerdings mit parallelen Spins.

1. Welche 4 elektrischen Ladungszustände existieren für Δ -Baryonen? Welchen starken Isospin haben daher die Δ Baryonen, und wie groß sind jeweils die dritten Komponenten I_3^S ?
2. Der Zerfall der Δ -Baryonen erfolgt fast ausschließlich über $\Delta \rightarrow \pi N$, wobei $\pi = (\pi^+, \pi^0, \pi^-)$ und $N = (p, n)$. Welche Wechselwirkung ist für den Zerfall verantwortlich, und warum spielen die anderen Wechselwirkungen für den Zerfall eine untergeordnete Rolle? Welche Zerfallskanäle existieren für welches Δ Baryon?
3. Verwenden Sie die Symmetrie im starken Isospin, um die Anteile der jeweiligen Zerfallsmöglichkeiten (=Verzweungsverhältnisse) der Δ -Baryonen herzuleiten: Diese Anteile lassen sich aus der Forderung herleiten, dass wegen der Symmetrie im starken Isospin bei Zerfällen über starke Wechselwirkung alle 3 elektrischen Ladungszustände der Pionen gleich häufig vorkommen müssen, wenn man über alle I_3^S -Zustände der Δ Baryonen summiert. Zusätzlich müssen aber auch p und n in der Summe über alle 4 elektrischen Ladungszustände der Δ -Baryonen mit gleicher Häufigkeit auftreten, Stellen Sie ein geeignetes lineares Gleichungssystem auf und lösen Sie es. (Anm: Das Gleichungssystem ist überbestimmt. Prüfen Sie daher, ob ihre Lösung auch überzählige Randbedingungen erfüllt.)
4. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit den Clebsch-Gordan Koeffizienten aus <http://pdg.lbl.gov/2011/reviews/rpp2011-rev-clebsch-gordan-coefs.pdf>,
 $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M \rangle = \langle I^S(1) I^S(2) I_3^S(1) I_3^S(2) | I^S(1) I^S(2) I^S I_3^S \rangle$ die für den Zerfall eines Teilchens mit (I^S, I_3^S) in zwei Teilchen mit starkem Isospin $I^S(1)$ und $I^S(2)$ die Anteile der Teilchenzustände 1 mit $(I^S(1), I_3^S(1))$ und 2 mit $(I^S(2), I_3^S(2))$ beschreiben. Beachten Sie, dass bei der Tabellierung jeweils eine Wurzel weggelassen wurde, und sie die Koeffizienten für die Berechnung der Verzweungsverhältnisse natürlich quadrieren müssen.

2.2 Die Massen der Nukleonen

Die Massen der $\ell = 0$ Baryonen mit Spin $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$ lassen sich parametrisieren als

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + 4A \sum_{i < j} \frac{M_u^2}{M_i M_j} \langle \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \rangle$$

wobei sich die Konstituentenmassen der Quarks (etwas höher als in Mesonen) zu $M_u \approx M_d \approx 363$ MeV und $M_s = 538$ MeV ergeben. Für Baryonen, die nur aus u- und d-Quarks bestehen, reduziert sich die Summe im Spin-Spin Term zu $\langle \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 \rangle = \frac{1}{2} \langle s^2 - s_1^2 - s_2^2 - s_3^2 \rangle$

1. Verwenden Sie diese Beziehung um aus der Massendifferenz zwischen $\Delta^+(1232 \text{ MeV})$ und $p(938 \text{ MeV})$ den Spin-Spin Parameter A für Baryonen zu bestimmen.
2. Durch Massen- und elektrische Ladungsunterschiede zwischen u und d-Quark wird die starke Isospinsymmetrie leicht gebrochen und es entstehen kleine Massenunterschiede innerhalb der starken Isospin-Multipletts. Berechnen Sie im Folgenden die jeweiligen Beiträge zum Massenunterschied zwischen Proton (938,3 MeV) und Neutron (939,6 MeV) unter der Annahme von (in dieser Genauigkeit noch gar nicht bekannten) 'nackten' Quarkmassen $m_u = 2,2 \text{ MeV}$ und $m_d = 4,7 \text{ MeV}$ und daraus resultierenden unterschiedlichen Konstituentenmassen $M_u = 362,2 \text{ MeV}$ und $M_d = 364,7 \text{ MeV}$.
 - Wie groß ist die jeweils resultierende Massenkorrektur für p und n durch die Summe der neuen Konstituentenmassen?
 - Wie groß jeweils die Korrektur zum Spin-Spin Term, wenn jede Quarkpaarung den gleichen Spin-Spin Beitrag $\langle \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \rangle = \frac{1}{3} \langle \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 \rangle$ leistet?
 - Wenn die verbleibende Differenz zum beobachteten Massenunterschied von 1,3 MeV an den unterschiedlichen potenziellen Coulomb-Energien $\langle V_C \rangle = \alpha Z_i Z_j / \langle r_{ij} \rangle$ zwischen den Quarks liegt, wie groß muss dann der mittlere Abstand $\langle r_{ij} \rangle$ zwischen ihnen sein?

2.3 Zweidimensionales $SU(4)_f$ Meson Multipletts

Aus je einem von 4 Quarks (u, d, s, c) und 4 Antiquarks $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}, \bar{c}$ lassen sich 16 Mesonen mit verschiedenem Quarkinhalt zusammensetzen.

- (a) Tragen Sie diese 16 Kombinationen in ein 2-dimensionales Ordnungsschema ein, wobei die Achsen folgendermaßen definiert sein sollen:

- vertikal: Starke Hyperladung $Y^S := (S + C)/2$
- horizontal: 3. Komponente des Starken Isospins $I_3^S := Z - Y^S$

und die additiven Quantenzahlen Seltsamkeit S bzw. Charm C die Zahl der s- bzw. c-Quarks im Meson bezeichnen sollen. Das Vorzeichen ist dabei über das Vorzeichen der elektrischen Ladung der Quarks definiert (Das $\bar{s}$ hat also $S=+1$, vgl. folgende Tabelle 14.1).

- (b) Suchen Sie für mindestens eine Kombination von Spin und Drehimpuls $^{2s+1}\ell_J$, also z.B. 1S_0 oder 3S_1 in den folgenden Tabellen 14.2 und 14.3 der Meson-Summary Tables der Particle Data Group http://pdg.lbl.gov/2008/tables/contents_tables_mesons.html den Namen der jeweiligen Teilchen. Lassen Sie sich nicht dadurch stören, dass die $I_3^S = 0$ Mesonen miteinander mischen können. Für die u, d und s-quarks werden folgende Mischungen beobachtet:

- $\pi^0 = (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$
- $\eta \approx (u\bar{u} + d\bar{d} - s\bar{s})/\sqrt{3}$
- $\eta' \approx (u\bar{u} + d\bar{d} + 2s\bar{s})/\sqrt{6}$
- $\rho^0 = (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$
- $\omega \approx (u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$
- $\phi \approx (s\bar{s})$

14. QUARK MODEL

Revised December 2007 by C. Amsler (University of Zürich), T. DeGrand (University of Colorado, Boulder), and B. Krusche (University of Basel).

14.1. Quantum numbers of the quarks

Quarks are strongly interacting fermions with spin 1/2 and, by convention, positive parity. Antiquarks have negative parity. Quarks have the additive baryon number 1/3, antiquarks -1/3. Table 14.1 gives the other additive quantum numbers (flavors) for the three generations of quarks. They are related to the charge Q (in units of the elementary charge e) through the generalized Gell-Mann-Nishijima formula

$$Q = I_z + \frac{\mathcal{B} + S + C + B + T}{2}, \quad (14.1)$$

where $\mathcal{B}$ is the baryon number. The convention is that the *flavor* of a quark (I_z , S , C , B , or T) has the same sign as its *charge* Q . With this convention, any flavor carried by a charged meson has the same sign as its charge, *e.g.*, the strangeness of the K^+ is +1, the bottomness of the B^+ is +1, and the charm and strangeness of the D_s^- are each -1. Antiquarks have the opposite flavor signs.

Table 14.1: Additive quantum numbers of the quarks.

Property \ Quark	d	u	s	c	b	t
Q – electric charge	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$
I – isospin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
I_z – isospin z -component	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	0	0	0
S – strangeness	0	0	-1	0	0	0
C – charm	0	0	0	+1	0	0
B – bottomness	0	0	0	0	-1	0
T – topness	0	0	0	0	0	+1

14.2. Mesons

Mesons have baryon number $\mathcal{B} = 0$. In the quark model, they are $q\bar{q}'$ bound states of quarks q and antiquarks $\bar{q}'$ (the flavors of q and q' may be different). If the orbital angular momentum of the $q\bar{q}'$ state is ℓ , then the parity P is $(-1)^{\ell+1}$. The meson spin J is given by the usual relation $|\ell - s| < J < |\ell + s|$, where s is 0 (antiparallel quark spins) or 1 (parallel quark spins). The charge conjugation, or C -parity $C = (-1)^{\ell+s}$, is defined only for the $q\bar{q}$ states made of quarks and their own antiquarks. The C -parity can be generalized to the G -parity $G = (-1)^{I+\ell+s}$ for mesons made of quarks and their own antiquarks (isospin $I_z = 0$), and for the charged $u\bar{d}$ and $d\bar{u}$ states (isospin $I = 1$).

2 14. Quark model

The mesons are classified in J^{PC} multiplets. The $\ell = 0$ states are the pseudoscalars (0^{-+}) and the vectors (1^{--}). The orbital excitations $\ell = 1$ are the scalars (0^{++}), the axial vectors (1^{++}) and (1^{+-}), and the tensors (2^{++}). Assignments for many of the known mesons are given in Tables 14.2 and 14.3. Radial excitations are denoted by the principal quantum number n . The very short lifetime of the t quark makes it likely that bound-state hadrons containing t quarks and/or antiquarks do not exist.

States in the natural spin-parity series $P = (-1)^J$ must, according to the above, have $s = 1$ and hence, $CP = +1$. Thus, mesons with natural spin-parity and $CP = -1$ (0^{+-} , 1^{-+} , 2^{+-} , 3^{-+} , *etc.*) are forbidden in the $q\bar{q}'$ model. The $J^{PC} = 0^{--}$ state is forbidden as well. Mesons with such *exotic* quantum numbers may exist, but would lie outside the $q\bar{q}'$ model (see section below on exotic mesons).

Following SU(3), the nine possible $q\bar{q}'$ combinations containing the light u , d , and s quarks are grouped into an octet and a singlet of light quark mesons:

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} . \quad (14.2)$$

A fourth quark such as charm c can be included by extending SU(3) to SU(4). However, SU(4) is badly broken owing to the much heavier c quark. Nevertheless, in an SU(4) classification, the sixteen mesons are grouped into a 15-plet and a singlet:

$$\mathbf{4} \otimes \bar{\mathbf{4}} = \mathbf{15} \oplus \mathbf{1} . \quad (14.3)$$



Table 14.2: Suggested $q\bar{q}$ quark-model assignments for some of the observed light mesons. Mesons in bold face are included in the Meson Summary Table. The wave functions f and f' are given in the text. The singlet-octet mixing angles from the quadratic and linear mass formulae are also given for the well established nonets. The classification of the 0^{++} mesons is tentative and the mixing angle uncertain due to large uncertainties in some of the masses. Also, the $f_0(1710)$ and $f_0(1370)$ are expected to mix with the $f_0(1500)$. The latter is not in this table as it is hard to accommodate in the scalar nonet. The light scalars $a_0(980)$, $f_0(980)$, and $f_0(600)$ are often considered as meson-meson resonances or four-quark states, and are therefore not included in the table. See the “Note on Scalar Mesons” in the Meson Listings for details and alternative schemes.

$n^{2s+1}\ell_J$	J^{PC}	$l = 1$ $u\bar{d}, \bar{u}d, \frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} - u\bar{u})$	$l = \frac{1}{2}$ $u\bar{s}, d\bar{s}; \bar{d}s, -\bar{u}s$	$l = 0$ f'	$l = 0$ f	θ_{quad} [°]	θ_{lin} [°]
1^1S_0	0^{-+}	π	K	η	$\eta'(958)$	-11.5	-24.6
1^3S_1	1^{--}	$\rho(770)$	$K^*(892)$	$\phi(1020)$	$\omega(782)$	38.7	36.0
1^1P_1	1^{+-}	$b_1(1235)$	$K_{1B}^\dagger$	$h_1(1380)$	$h_1(1170)$		
1^3P_0	0^{++}	$a_0(1450)$	$K_0^*(1430)$	$f_0(1710)$	$f_0(1370)$		
1^3P_1	1^{++}	$a_1(1260)$	$K_{1A}^\dagger$	$f_1(1420)$	$f_1(1285)$		
1^3P_2	2^{++}	$a_2(1320)$	$K_2^*(1430)$	$f_2'(1525)$	$f_2(1270)$	29.6	28.0
1^1D_2	2^{-+}	$\pi_2(1670)$	$K_2(1770)^\dagger$	$\eta_2(1870)$	$\eta_2(1645)$		
1^3D_1	1^{--}	$\rho(1700)$	$K^*(1680)$		$\omega(1650)$		
1^3D_2	2^{--}		$K_2(1820)$				
1^3D_3	3^{--}	$\rho_3(1690)$	$K_3^*(1780)$	$\phi_3(1850)$	$\omega_3(1670)$	32.0	31.0
1^3F_4	4^{++}	$a_4(2040)$	$K_4^*(2045)$		$f_4(2050)$		
1^3G_5	5^{--}	$\rho_5(2350)$					
1^3H_6	6^{++}	$a_6(2450)$			$f_6(2510)$		
2^1S_0	0^{-+}	$\pi(1300)$	$K(1460)$	$\eta(1475)$	$\eta(1295)$		
2^3S_1	1^{--}	$\rho(1450)$	$K^*(1410)$	$\phi(1680)$	$\omega(1420)$		

[†] The 1^{+-} and 2^{-+} isospin $\frac{1}{2}$ states mix. In particular, the K_{1A} and K_{1B} are nearly equal (45°) mixtures of the $K_1(1270)$ and $K_1(1400)$. The physical vector mesons listed under 1^3D_1 and 2^3S_1 may be mixtures of 1^3D_1 and 2^3S_1 , or even have hybrid components.

6 14. Quark model

Table 14.3: $q\bar{q}$ quark-model assignments for the observed heavy mesons. Mesons in bold face are included in the Meson Summary Table.

$n^{2s+1}\ell_J J^{PC}$	$l=0$ $c\bar{c}$	$l=0$ $b\bar{b}$	$l=\frac{1}{2}$ $c\bar{u}, c\bar{d}; \bar{c}u, \bar{c}d$	$l=0$ $c\bar{s}; \bar{c}s$	$l=\frac{1}{2}$ $b\bar{u}, b\bar{d}; \bar{b}u, \bar{b}d$	$l=0$ $b\bar{s}; \bar{b}s$	$l=0$ $b\bar{c}; \bar{b}c$
$1^1S_0 \quad 0^{-+}$	$\eta_c(1S)$	$\eta_b(1S)$	D	$D_s^\pm$	B	B_s^0	$B_c^\pm$
$1^3S_1 \quad 1^{--}$	$J/\psi(1S)$	$\Upsilon(1S)$	D^*	$D_s^{*\pm}$	B^*	B_s^*	
$1^1P_1 \quad 1^{+-}$	$h_c(1P)$		$D_1(2420)$	$D_{s1}(2536)^\pm$			
$1^3P_0 \quad 0^{++}$	$\chi_{c0}(1P)$	$\chi_{b0}(1P)$	$D_0^*(2400)$	$D_{s0}^*(2317)^{\pm\dagger}$			
$1^3P_1 \quad 1^{++}$	$\chi_{c1}(1P)$	$\chi_{b1}(1P)$		$D_{s1}(2460)^{\pm\dagger}$			
$1^3P_2 \quad 2^{++}$	$\chi_{c2}(1P)$	$\chi_{b2}(1P)$	$D_2^*(2460)$	$D_{s2}(2573)^\pm$			
$1^3D_1 \quad 1^{--}$	$\psi(3770)$						
$2^1S_0 \quad 0^{-+}$	$\eta_c(2S)$						
$2^3S_1 \quad 1^{--}$	$\psi(2S)$	$\Upsilon(2S)$					
$2^3P_{0,1,2} \quad 0^{++}, 1^{++}, 2^{++}$		$\chi_{b0,1,2}(2P)$					

[†] The masses of these states are considerably smaller than most theoretical predictions. They have also been considered as four-quark states (See the “Note on Non- $q\bar{q}$ Mesons” at the end of the Meson Listings). The $D_{s1}(2460)^\pm$ and $D_{s1}(2536)^\pm$ are mixtures of the $1^{+\pm}$ states.

• Indicates particles that appear in the preceding Meson Summary Table. We do not regard the other entries as being established.

[illegible]