Probeklausur Mathematik I (für IF, ET und Ph)

— Musterlösung —

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 1 *(2+2+3 Punkte)*

(a)

A	B	C	P_1: $A \Longrightarrow B$	P_2: $B \Longleftrightarrow C$	P_3: $P_1 \wedge P_2$	P_4: $A \wedge B$	P: $P_3 \Longrightarrow P_4$
0	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}(x,y) \in (A\cap C)\times(B\cap D) &\Longleftrightarrow (x \in A\cap C) \wedge (y \in B \cap D)\\ &\Longleftrightarrow (x\in A) \wedge (x \in C) \wedge (y \in B) \wedge (y \in D)\\ &\Longleftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in C \wedge y \in D)\\ &\Longleftrightarrow [(x,y)\in(A\times B)] \wedge [(x,y) \in (C\times D)]\\ &\Longleftrightarrow (x,y) \in (A\times B)\cap(C\times D)\end{aligned}$$

(c) M_1 ist eine beschränkte Menge mit $\min M_1 = -2$ und $\max M_1 = 3$. Denn $-x^2+x+6$ ergibt eine nach unten offene Parabel, deren Nullstellen eben bei

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

M_2 ist eine beschränkte Menge mit $\min M_2 = 1$ und $\sup M_2 = 3$, da für $n = 1$ $3 - \frac{2}{n} = 1$ und für $n \to \infty$ gilt $3 - \frac{2}{n} \to 3$.

M_3 ist eine nach unten beschränkte Menge mit $\min M_3 = 0$. Nach oben ist sie unbeschränkt, da der Logarithmus (streng monoton) wächst. Ferner gilt $\ln(0+1) = \ln 1 = 0$.

Aufgabe 2

(a) Die Division erfolgt am besten in kartesischer Darstellung:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(-1+i)(3+2i)}{3^2+2^2} = -\frac{5}{13} + \frac{1}{13}i.$$

Die Berechnung von z_1^{10} führt man zweckmäßig in Polarkoordinaten aus. Es gilt

$$|z_1| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \arg(z_1) = \frac{3}{4}\pi \ (\hat{=}135°),$$

d. h. $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}$. Das Argument $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ erhält man dabei als Lösung von

$$\tan\varphi = \frac{\operatorname{Im} z_1}{\operatorname{Re} z_1} = -1,$$

wobei auf die Lage von z_1 im 2. Quadranten zu achten ist. (Alternativ liest man φ einfach aus einer Skizze ab – dies geht, weil unser spezielles z_1 auf der Diagonalen $y = -x$ der Gaußschen Zahlenebene liegt). Nun berechnet man

$$z_1^{10} = (\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i})^{10} = \sqrt{2}^{10} e^{10\frac{3}{4}\pi i} = 32e^{\frac{15}{2}\pi i} = 32e^{\frac{3}{2}\pi i} = -32i. \tag{1}$$

(b) Ein Produkt ist nur dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Wir erhalten die Lösungen der Gleichung also durch Lösen von

$$(z - 3 + 4i) = 0 \quad \text{und} \quad (z^4 + 81) = 0.$$

Erstere hat offensichtlich die Lösung $z_0 = 3 - 4i$. Letztere hat die als Lösung die vierten Wurzeln von $-81 = 81\exp(i\pi)$, also

$$z_1 = 3\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right), \quad z_2 = 3\exp\left(i\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right), \quad z_3 = 3\exp\left(i\frac{\pi}{4} + \pi\right), \quad z_4 = 3\exp\left(i\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)$$

bzw. in Koordinatenform (nicht gefordert)

$$z_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}(1+i), \quad z_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}(-1+i), \quad z_3 = \frac{3}{\sqrt{2}}(-1-i), \quad z_4 = \frac{3}{\sqrt{2}}(1-i).$$

(c) Die erste Bedingung liest sich mit $z = x + iy$ als $y \geq |x|$ und die zweite beschreibt einen Kreis um i mit Radius 1. Die Bedingungen beschreiben also die Fläche, welche sich aus dem Schnitt des Dreiecks zwischen $z = 0$ und $z = (\pm 1 + i)$ mit dem oberen Halbkreis von $|z - i| \leq 1$ ergibt.

Aufgabe 3

(a) Durch Einsetzen der Einheitsvektoren in die lineare Abbildung f sieht man, dass die zu f gehörige Abbildungsmatrix A durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Da offensichtlich $\mathrm{Rang}(A) = 1$ gilt ist der Kern von A zweidimensional. Da für $(x, y, z) \in \mathcal{N}(A)$ gelten muss, dass $x - y + z = 0$ ist, ist eine Basis von $\mathcal{N}(A)$ durch die Vektoren $(1, 0, -1)$ und $(0, 1, 1)$ gegeben.

(b) Durch Einsetzen der Einheitsvektoren in die lineare Abbildung f sieht man, dass die zu f gehörige Abbildungsmatrix A durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Da offensichtlich $\mathrm{Rang}(A) = 2$ gilt ist der Kern von A eindimensional. Er wird durch den Vektor $(0, 0, 1)$ aufgespannt.

Aufgabe 4

(a) Nein, denn das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat offensichtlich keine Lösung: 3. Zeile besagt $\lambda_1 = \lambda_2$, aber $2\lambda_1 = 3$ und $5\lambda_1 = 4$ (eingesetzt in 1. und 2. Zeile) haben nicht die gleiche Lösung.

(b) Ja, denn sind λ und μ so, dass $\lambda(\vec{v}+\vec{w})+\mu(\vec{v}-\vec{w})=0$ so sind wegen

$$\lambda(\vec{v}+\vec{w})+\mu(\vec{v}-\vec{w})=(\lambda+\mu)\vec{v}+(\lambda-\mu)\vec{w}$$

und der linearen Unabhängigkeit von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ die Gleichungen $\lambda+\mu=0$ und $\lambda-\mu=0$ erfüllt. Dieses Gleichungssystem in λ und μ hat aber nur die Lösung $\lambda=\mu=0$.

(c) Ja, da voller Rang heißt, dass die Matrix A invertierbar ist. Also gibt es eine Umkehrabbildung $f^{-1}(\vec{y})=A^{-1}\vec{y}$, und somit muss f bijektiv sein.

(d) Ja, da abgeschlossen bzgl. der Addition und skalaren Multiplikation: Für $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in U\cap W$ gilt $\vec{v}_1+\vec{v}_2\in U\cap W$, da $\vec{v}_1+\vec{v}_2\in U$ und $\vec{v}_1+\vec{v}_2\in W$. Multiplikation analog.