

Studiengang	
Matrikelnummer	Name, Vorname

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
Punkte	/ 7	/ 6	/ 6	/ 4	/ 23

Spielklausur Mathematik I (für IF, ET und Ph)

Wintersemester 2019/20 (12.12.2019)

Hinweis zur Bearbeitung:

Sämtliche Aussagen müssen begründet werden. Auf Antworten ohne Angabe des Lösungswegs werden keine Punkte vergeben.

Aufgabe 1 (2+2+3 Punkte)

- (a) Stellen Sie die Wahrheitstabelle für den folgenden aussagenlogischen Ausdruck auf:

$$((A \implies B) \wedge (B \iff C)) \implies (A \wedge B).$$

- (b) Weisen Sie nach, dass folgende Mengenbeziehung gilt:

$$(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (C \times D).$$

- (c) Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Beschränktheit und geben Sie ggf. $\inf M$, $\sup M$ bzw. $\min M$, $\max M$ an:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 + x + 6 \geq 0\}, \quad M_2 = \left\{3 - \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad M_3 = \{\ln(x+1) : x \in [0, \infty)\}.$$

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)

- (a) Für $z_1 = i - 1$ und $z_2 = 3 - 2i$ berechne man $\frac{z_1}{z_2}$ sowie z_1^{10} und gebe die Ergebnisse in kartesischer Form an.

- (b) Bestimmen Sie sämtliche komplexen Lösungen der Gleichung

$$(z - 3 + 4i)(z^4 + 81) = 0.$$

- (c) Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen $z = x + iy$, die beide der folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\operatorname{Im} z - |\operatorname{Re} z| \geq 0 \quad \text{und} \quad |z - i| \leq 1.$$

Aus Ihrer Skizze sollte man erkennen, ob Randpunkte zur Menge gehören oder nicht.

Aufgabe 3 (3 + 3 Punkte)

- (a) Geben Sie für die folgende Abbildung die Abbildungsmatrix an und berechnen Sie eine Basis des Kerns:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x - y + z.$$

- (b) Geben Sie für die folgende Abbildung die Abbildungsmatrix an und berechnen Sie eine Basis des Kerns:

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (1+1+1+1 Punkte)

Sind folgende Aussagen richtig? (Ohne Begründung)

Hinweis: Für falsche Antworten wird ein Punkt abgezogen.

- | | ja | nein |
|--|--------------------------|--------------------------|
| (a) $(3, 4, 0)^\top$ ist eine Linearkombination von $(1, 2, 1)^\top$ und $(1, 3, -1)^\top$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (b) Es seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Sind \vec{v} und \vec{w} linear unabhängig, so auch $\vec{v} + \vec{w}$ und $\vec{v} - \vec{w}$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (c) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ ist bijektiv, falls $\text{rang}(A) = n$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (d) Sind U, W Unterräume eines Vektorraumes V , so ist dies auch $U \cap W$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |