TU Chemnitz – Professur Analysis
Prof. Dr. Peter Stollmann
Dr. Martin Tautenhahn, Dipl.-Math. Clemens Bombach, Dipl.-Math. Christian Rebs

Mathematik I (für IF, ET und Ph)

Wintersemester 2019/20

Mathematik I (für Informatiker, ET und IK)

Wintersemester 2015/16

0. Übung: Wiederholung (Musterlösung)

Aufgabe 1

Wiederholung: Doppelbrüche, Binomische Formeln, Potenzgesetze (ganzzahlig).

Lösung:

(a)

$$\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}\right):\left(\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}\right)=\left(\frac{x+y+x-y}{\underbrace{(x-y)(x+y)}_{=x^2-y^2}}\right):\left(\frac{x+y-(x-y)}{\underbrace{(x-y)(x+y)}_{=x^2-y^2}}\right)$$
$$=\left(\frac{2x}{x^2-y^2}\right)\cdot\left(\frac{x^2-y^2}{2y}\right)$$
$$=\frac{x}{y}$$

(b)

$$\left(\frac{x-y}{a+b}\right)^2\left(\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}\right)^2=\left(\frac{x-y}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}\right)^2=\left(\frac{x-y}{a+b}\cdot\frac{(a+b)(a-b)}{(x+y)(x-y)}\right)^2=\left(\frac{a-b}{x+y}\right)^2.$$

(c)

$$\frac{162m^{-2}n^4}{375a^2b^3}:\frac{54(mn)^3}{150a^2b^{-1}}=\frac{162m^{-2}n^4}{375a^2b^3}\cdot\frac{150a^2b^{-1}}{54(mn)^3}=\frac{162m^{-2}n^4}{375a^2b^3}\cdot\frac{150a^2b^{-1}}{54m^3n^3}=\frac{162}{54}\frac{150}{375}\frac{a^2b^{-1}m^{-2}n^4}{a^2b^3m^3n^3}$$
$$=3\frac{6}{15}\frac{n}{b^4m^5}=\frac{6n}{5b^4m^5}.$$

Aufgabe 2

Wiederholung: pq-Formel bzw. Lösung quadratischer Gleichungen.

Lösung:

(a) $\dfrac{2x+1}{2x-3}-1=\dfrac{x-4}{2x+3}-\dfrac{7x}{9-4x^2}$.

Wir beachten, dass $x\neq\pm\frac{3}{2}$, sonst sind Terme in der Gleichung nicht definiert. Weiterhin erkennen wir die 3. Binomische Formel in den Nennern:

$$9-4x^2=-(2x-3)(2x+3).$$

Auflösen der Brüche sowie Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ergeben:

$$\begin{aligned}
&& \frac{2x+1}{2x-3} - 1 &= \frac{x-4}{2x+3} - \frac{7x}{9-4x^2} \\
\Rightarrow && (2x+1)(2x+3) - (4x^2-9) &= (x-4)(2x-3) + 7x \\
\Rightarrow && (4x^2+2x+6x+3) - (4x^2-9) &= (2x^2-8x-3x+12) + 7x \\
\Rightarrow && 8x+12 &= 2x^2-4x+12 \\
\Rightarrow && 0 &= 2x^2-12x \\
\Rightarrow && 0 &= x^2-6x = x(x-6).
\end{aligned}$$

Wir erhalten direkt die zwei Lösungen $x = 0$ und $x = 6$. Alternativ: Anwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen (pq-Formel) mit $p = -6, q = 0$ liefert

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{-6}{2} \pm \frac{6}{2} = \{6, 0\}.$$

(b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Wir erkennen, dass es eine Gleichung 4. Grades ist, für die es keine allgemeine, geschlossene Lösungsformel gibt. Allerdings erlaubt uns die spezielle Struktur der Gleichung die Anwendung eines Tricks: Substitution $z = x^2$. Mittels dieser ergibt sich die alte Gleichung zu

$$z^2 - 5z + 4 = 0.$$

Mit Anwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen (pq-Formel) mit $p = -5, q = 4$ erhalten wir die zwei Lösungen

$$z = -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25-16}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad z_1 = \frac{8}{2} = 4, z_2 = \frac{2}{2} = 1.$$

Nun muss noch die Substitutionsgleichung $z = x^2$ für jede der beiden Lösungen z_1 und z_2 aufgelöst werden, um die (vier) Lösungen der Ausgangsgleichung zu bestimmen. Wir erhalten

$$x^2 = z_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, x_2 = -2; \qquad x^2 = z_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1, x_4 = -1.$$

Aufgabe 3

Wiederholung: Wurzeln, rationale Potenzen und deren Rechenregeln.

Lösung:

(a) Wir erkennen zunächst

$$(\sqrt{a})^{-2} = (a^{\frac{1}{2}})^{-2} = a^{\frac{1}{2}\cdot(-2)} = a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Mit der 2. binomischen Formel sowie Anwendung der Potenzgesetze und der 3. binomischen Formel erhalten wir weiterhin

$$\begin{aligned}
\left[\sqrt{a^2 + a\sqrt{a^2-b^2}} - \sqrt{a^2 - a\sqrt{a^2-b^2}}\right]^2 &= a^2 + a\sqrt{a^2-b^2} - 2\sqrt{a^2 + a\sqrt{a^2-b^2}}\sqrt{a^2 - a\sqrt{a^2-b^2}} \\
&\quad + a^2 - a\sqrt{a^2-b^2} \\
&= 2a^2 - 2\sqrt{(a^2 + a\sqrt{a^2-b^2})(a^2 - a\sqrt{a^2-b^2})} \\
&= 2a^2 - 2\sqrt{a^4 - a^2(a^2-b^2)} \\
&= 2a^2 - 2\sqrt{a^4 - a^4 + a^2b^2} = 2a^2 - 2\sqrt{a^2b^2} \\
&= 2a^2 - 2|ab|.
\end{aligned}$$

Da a, b positiv sind, erhalten wir insgesamt:

$$(\sqrt{a})^{-2}\left[\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right]^2=\frac{1}{a}\left(2a^2-2ab\right)=2(a-b).$$

(b)

- $\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=0.$

  Wir erkennen zunächst, dass $x \geq -3$, $x \geq -\frac{1}{3}$ sowie $x \geq 1$ gelten muss, sonst sind die Wurzeln nicht definiert (bzw. reell, evtl. Hinweis auf komplexe Zahlen). Also sei $x \geq 1$. Wir bringen zunächst die negativen Terme auf die rechte Seite und quadrieren (wieder Anwendung binomischer Formel):

$$\begin{aligned}
&& \sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}&=0\\
\Rightarrow && \sqrt{x+3}&=\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-1}\\
\Rightarrow && x+3&=(3x+1)+2\sqrt{3x+1}\sqrt{x-1}+(x-1)\\
\Rightarrow && 3-3x&=2\sqrt{3x+1}\sqrt{x-1}\\
\Rightarrow && (3-3x)^2&=4(3x+1)(x-1)\\
\Rightarrow && 9-2\cdot 3\cdot 3x+9x^2&=4(3x^2+x-3x-1)\\
\Rightarrow && 9-18x+9x^2&=12x^2-8x-4\\
\Rightarrow && 0&=3x^2+10x-13
\end{aligned}$$

  Lösen mittels pq-Formel ($p=\frac{10}{3}, q=\frac{-13}{3}$) liefert

$$x=-\frac{5}{3}\pm\sqrt{\underbrace{\frac{25}{9}+\frac{13}{3}}_{=\frac{25+39}{9}=\frac{64}{9}}}=-\frac{5}{3}\pm\frac{8}{3},$$

  also $x_1=1$ und $x_2=-\frac{13}{3}$. Unter Beachtung der Bedingung $x \geq 1$ (siehe oben), verbleibt $x=1$ als Lösung.

- $\sqrt{x+1+\sqrt{3x+4}}=3.$

  Erneut müssen wir Bedingungen an x stellen, damit die Wurzeln definiert/reell sind. Dies ist hier aber nicht so einfach (äußere Wurzel). Wir werden stattdessen am Ende eine Probe für jede erhaltene Lösung durchführen. Analoges Vorgehen zur ersten Gleichung liefert

$$\begin{aligned}
&& \sqrt{x+1+\sqrt{3x+4}}&=3\\
\Rightarrow && x+1+\sqrt{3x+4}&=9\\
\Rightarrow && \sqrt{3x+4}&=8-x\\
\Rightarrow && 3x+4&=64-16x+x^2\\
\Rightarrow && 0&=x^2-19x+60
\end{aligned}$$

  Lösen mittels pq-Formel ($p=-19, q=60$) ergibt

$$x=\frac{19}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\frac{361}{4}-60}_{=\frac{361-240}{4}=\frac{121}{4}}}=\frac{19}{2}\pm\frac{11}{2},$$

wobei $19^2 = (20-1)^2 = 400 - 2 \cdot 20 + 1 = 361$ genutzt werden kann. Als mögliche Lösungen erhalten wir somit $x_1 = \frac{30}{2} = 15$ und $x_2 = \frac{8}{2} = 4$.
Probe für x_1:

$$\sqrt{x_1 + 1 + \sqrt{3x_1 + 4}} = \sqrt{15 + 1 + \sqrt{45 + 4}} = \sqrt{15 + 1 + \sqrt{49}} = \sqrt{15 + 1 + 7} = \sqrt{23} \neq 3.$$

Probe für x_2:

$$\sqrt{x_2 + 1 + \sqrt{3x_2 + 4}} = \sqrt{4 + 1 + \sqrt{12 + 4}} = \sqrt{4 + 1 + \sqrt{16}} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

Damit ist nur $x = 4$ eine Lösung.

Erklärung: Vor dem 2. Quadrieren haben wir vergessen die Positivität von $\sqrt{3x+4} = 8 - x$ zu garantieren, indem wir $x \leq 8$ fordern (sowie auch $x \geq -\frac{4}{3}$ für die Wurzel). Nach dem Quadrieren ist diese Vorzeicheninformation verlorengegangen:

$$3x + 4 = (8 - x)^2 = (-1)^2 (8 - x)^2.$$

In der Tat gilt $8 - x_1 = 8 - 15 = -7 < 0$, aber $8 - x_2 = 4 > 0$.

Aufgabe 4

Wiederholung: Logarithmen und deren Regeln, Eulersche Zahl und $\ln$.

Lösung:

(a) Mit Anwendung der Logarithmengesetzte erhalten wir

$$\begin{aligned}
\ln \frac{\mathrm{e}^3 (a+b)}{\sqrt[3]{(a+b)^2}} &= \ln \left(\mathrm{e}^3 (a+b)\right) - \ln \left(\sqrt[3]{(a+b)^2}\right) \\
&= \ln \mathrm{e}^3 + \ln(a+b) - \ln \left((a+b)^{\frac{2}{3}}\right) \\
&= 3 \ln \mathrm{e} + \ln(a+b) - \frac{2}{3} \ln(a+b) \\
&= 3 + \frac{1}{3} \ln(a+b).
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\log_2 8 + \log_{27} 3 + \log_4 (\log_2 16) = 3 + \frac{1}{\log_3 27} + \log_4 4 = 3 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{13}{3}.$$

(c) • $\ln\left(x^2 + 4x + 2\right) - \ln(x + 12) = 0.$

Wir beachten zunächst, dass $x^2 + 4x + 2 > 0$ und $x + 12 > 0$ gelten muss, was wir später wieder für erhaltene Lösungen abprüfen werden. Umformen ergibt

$$\begin{aligned}
& \ln\left(x^2 + 4x + 2\right) - \ln(x + 12) = 0 \\
\Rightarrow \quad & \ln\left(x^2 + 4x + 2\right) = \ln(x + 12) \\
\Rightarrow \quad & x^2 + 4x + 2 = x + 12 \\
\Rightarrow \quad & x^2 + 3x - 10 = 0.
\end{aligned}$$

Lösen mit pq-Formel ($p = 3, q = -10$) ergibt

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{9}{4} + 10}_{=\frac{49}{4}}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2},$$

also $x_1 = \frac{4}{2} = 2$ und $x_2 = -\frac{10}{2} = -5$. Überprüfen der obigen Bedingungen:

$$x_1^2 + 4x_1 + 2 = 4 + 8 + 2 > 0, \qquad x_1 + 12 = 14 > 0$$

und

$$x_2^2 + 4x_2 + 2 = 25 - 20 + 2 = 6 > 0, \qquad x_2 + 12 = 7 > 0.$$

Somit sind sowohl $x_1 = 2$ als auch $x_2 = -5$ Lösungen der Gleichung.

- $a^{mx-p} = b^{nx-q}c^r$, mit $a, b, c > 0$ und $m \neq 0, n \neq 0$.

  Zunächst wenden wir den (natürlichen) Logarithmus auf beide Seiten der Gleichung an und formen danach weiter um:

$$\begin{aligned} & & a^{mx-p} &= b^{nx-q}c^r \\ \Rightarrow & & \ln\left(a^{mx-p}\right) &= \ln\left(b^{nx-q}\right) + \ln\left(c^r\right) \\ \Rightarrow & & (mx-p)\ln a &= (nx-q)\ln b + r\ln c \\ \Rightarrow & & (m\ln a)x - (n\ln b)x &= p\ln a - q\ln b + r\ln c \\ \Rightarrow & & x &= \frac{p\ln a - q\ln b + r\ln c}{m\ln a - n\ln b}. \end{aligned}$$

  Die getroffenen Voraussetzungen sichern dabei die Existenz aller vorkommenden Terme, solange $m\ln a - n\ln b \neq 0$ ist. Ist dies *nicht* der Fall, so erhalten wir aus obiger Rechnung die Gleichung

$$0 = p\ln a - q\ln b + r\ln c$$

  als Voraussetzung für die Lösbarkeit. Ist diese Voraussetzung erfüllt, so lösen alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung.