TU Chemnitz – Professur Analysis
Prof. Dr. Peter Stollmann
Dr. Martin Tautenhahn, Dipl.-Math. Clemens Bombach, Dipl.-Math. Christian Rebs

Mathematik I (für IF, ET und Ph)

Wintersemester 2019/20

1. Übungsblatt: Aussagenlogik und Mengenlehre (Lösungen)

Aufgabe 0

Lösung:

- "$2 + 13 = 15$" ist eine Aussage (wahr).
- "$\int e^x dx$" ist keine Aussage.
- "$2x - 1 = 7$" ist eine Aussage (wahr für $x = 4$, falsch für $x \neq 4$).
- "Warum ist $\frac{\pi}{2}$ größer als 1?" ist keine Aussage.
- "$2^{8220} - 1$ ist eine Primzahl." ist eine Aussage (falsch).

Aufgabe 1

Lösung:

(a)

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	0	**1**	1	0	**1**
1	0	0	**1**	0	1	**1**
1	1	1	**0**	0	0	**0**

(b)

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee C) \wedge (A \vee C)$
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	0	**0**	0	1	**0**
0	1	0	0	**0**	1	0	**0**
1	0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	1	1	**1**	1	1	**1**
1	0	1	0	**1**	1	1	**1**
1	1	0	0	**1**	1	1	**1**
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**

(c) Zum selber üben zuhause...

(d)

A	B	$A \Longrightarrow B$	$\overline{B}$	$A \wedge \overline{B}$	$\overline{A \wedge \overline{B}}$
0	0	**1**	1	0	**1**
0	1	**1**	0	0	**1**
1	0	**0**	1	1	**0**
1	1	**1**	0	0	**1**

Aufgabe 2

Lösung:

(a)

$$A \iff A \wedge 1 \quad \iff \quad A \wedge (1 \vee B) \iff (A \wedge 1) \vee (A \wedge B) \iff A \vee (A \wedge B)$$

(b)

$$\begin{aligned}\overline{\overline{A} \wedge (A \vee B)} &\iff A \vee \overline{A \vee B} \iff A \vee (\overline{A} \wedge \overline{B}) \\ &\iff (A \vee \overline{A}) \wedge (A \vee \overline{B}) \iff A \vee \overline{B} \\ &\iff \overline{B \wedge \overline{A}} \iff (B \implies A)\end{aligned}$$

Für den letzten Schritt siehe z.B. Aufgabe 1(d).
Auch $A \vee \overline{B}$ ist eine gültige Vereinfachung.

(c)

$$A \wedge (A \vee (\underbrace{A \wedge (A \vee B)}_{\iff A \text{ (siehe (a))}})) \quad \iff \quad A \wedge (A \vee A) \iff A \wedge A \iff A.$$

Aufgabe 3

Lösung:

(a) Aussage (i) stimmt und (ii) stimmt nicht.

(i) $\forall$Autos $A\exists$Motor M : A fährt mit M.
(ii) $\exists$Motor $M\forall$Autos A : A fährt mit M.

(b) Wieder stimmt Aussage (i) und (ii) stimmt nicht.

(i)Für alle reellen Zahlen x existiert eine natürliche Zahl n, so dass n größer gleich x ist.
(ii)Es existiert eine natürliche Zahl n, so dass für alle reellen Zahlen x die Zahl n größer gleich x ist.

Aufgabe 4

Wahrheitswerte der Aussagen:

$1 \in A$	wahr
$5 \in A$	falsch
$A \subset B$	falsch
$\{2\} \in A$	inkorrekt
$\{2\} \subset A$	wahr
$\emptyset \in A$	inkorrekt
$\emptyset \subset A$	wahr

Aufgabe 5

$A \cup B = [1,4], \quad A \cap B = \emptyset, \quad A \setminus B = A,\ B \cap C = \{4\}, \quad C \setminus D = \emptyset, \quad D \setminus C = (2,4) \cup (5,\infty),$
$A \cup D = [1,\infty) \setminus \{2\}$

Aufgabe 6

(a) $A \times B \times C = \{(1,a,n),(1,b,n),(1,c,n),(2,a,n),(2,b,n),(2,c,n)\}$.

(b) $|A^k| = |A|^k = n^k$.

(c) $A \times B = \big([0,1] \times [1,3]\big) \cup \big([0,1] \times \{4\}\big) \cup \big(\{3\} \times [1,3]\big) \cup \{(3,4)\}$, (1 Rechteck, 2 Strecken und 1 Punkt)

Aufgabe 7

Wir verifizieren kurz die Beziehung $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ und wiederholen dazu die Definition von $A \setminus B$ aus der Vorlesung:

$$\begin{aligned} A \setminus B &:= \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\} \\ &= \{x : x \in A \text{ und } x \in \overline{B}\} \\ &= A \cap \overline{B}. \end{aligned}$$

Unter Nutzung von $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ ergibt sich nun:

(a)

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cap C) &= A \cap \overline{(B \cap C)} = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} A \setminus (B \setminus C) &= A \setminus (B \cap \overline{C}) = A \cap \overline{B \cap \overline{C}} \\ &= A \cap (\overline{B} \cup C) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) \\ &= (A \setminus B) \cup (A \setminus \overline{C}) \end{aligned}$$

(c) Analog, aber etwas langwieriger:

$$\begin{aligned} A \setminus (A \setminus (B \setminus (B \setminus C))) &= A \setminus (A \setminus (B \setminus (B \cap \overline{C}))) = A \setminus (A \setminus (B \cap (\overline{B} \cup C))) \\ &= A \setminus (A \setminus (B \cap C)) = A \setminus (A \cap \overline{B \cap C}) \\ &= A \cap \overline{A \cap \overline{B \cap C}} = A \cap (A \cup (B \cap C)) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap C) = A \cap B \cap C \end{aligned}$$

(d) Seien z.B. $A = \{1,2,3,4\}, B = \{1,2\}, C = \{2,3\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &B \setminus C = \{1\}, \qquad A \setminus (B \setminus C) = \{2,3,4\}, \\ &A \setminus B = \{3,4\}, \qquad (A \setminus B) \setminus C = \{4\}. \end{aligned}$$

Ein einfacheres Beispiel wäre $A = B = C = \{1,2\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &B \setminus C = \emptyset, \qquad A \setminus (B \setminus C) = \{1,2\}, \\ &A \setminus B = \emptyset, \qquad (A \setminus B) \setminus C = \emptyset. \end{aligned}$$

Aufgabe 8

Wiederholung: $R \subset M \times M$ heißt

- **reflexiv** :$\Leftrightarrow$ "$\forall x \in M$ gilt $(x,x) \in R$"
- **transitiv** :$\Leftrightarrow$ "$\forall x,y,z \in M$ mit $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R$"
- **symmetrisch** :$\Leftrightarrow$ "$\forall x,y \in M$ mit $(x,y) \in R \Longrightarrow (y,x) \in R$"

Lösung:

(a) $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(3,1)\}$

- **reflexiv:** $1,2,3 \in M$ und $(1,1),(2,2),(3,3) \in R_1 \implies$ reflexiv
- **transitiv:** $(3,1),(1,2) \in R$ aber $(3,2) \notin R_1 \implies$ nicht transitiv
- **symmetrisch:** $(1,2) \in R$ aber $(2,1) \notin R_1 \implies$ nicht symmetrisch

also ist R_1 reflexiv.

$R_2 = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$

- **reflexiv:** $3 \in M$ aber $(3,3) \notin R_2 \implies$ nicht reflexiv
- **transitiv:**
  - $(1,2),(2,1) \in R_2 \Longrightarrow (1,1) \in R_2$
  - $(2,1),(1,2) \in R_2 \Longrightarrow (2,2) \in R_2$
  - $(1,1),(1,1) \in R_2 \Longrightarrow (1,1) \in R_2$
  - $(2,2),(2,2) \in R_2 \Longrightarrow (2,2) \in R_2$

  $\implies$ transitiv
- **symmetrisch:**
  - $(1,1) \in R_2 \Longrightarrow (1,1) \in R_2$
  - $(2,2) \in R_2 \Longrightarrow (2,2) \in R_2$
  - $(1,2) \in R_2 \Longrightarrow (2,1) \in R_2$
  - $(2,1) \in R_2 \Longrightarrow (1,2) \in R_2$

  $\implies$ symmetrisch

also ist R_2 transitiv und symmetrisch.

$R_3 = \{(1,1)\}$

- **reflexiv:** $3 \in M$ aber $(3,3) \notin R_3 \implies$ nicht reflexiv
- **transitiv:** $(1,1),(1,1) \in R_3 \Longrightarrow (1,1) \in R_3 \implies$ transitiv
- **symmetrisch:** $(1,1) \in R_3 \Longrightarrow (1,1) \in R_3 \implies$ symmetrisch

also ist R_3 transitiv, symmetrisch.

(b) $R_1 = \{(g_1,g_2) : g_1 \parallel g_2\}$

- Schreiben $g_1 \parallel g_2$ für $(g_1, g_2) \in R_1$
- **reflexiv:** $\forall g \in X : g \parallel g \Longrightarrow R_1$ reflexiv
- **transitiv:** Skizze: !! $g_1 \parallel g_2 \quad \wedge \quad g_2 \parallel g_3 \Longrightarrow g_1 \parallel g_3 \Longrightarrow$ transitiv
- **symmetrisch:** Skizze: !! $g_1 \parallel g_2 \Longrightarrow g_2 \parallel g_1 \Longrightarrow$ symmetrisch

also $\Longrightarrow R_1$ reflexiv, symmetrisch und transitiv $\Rightarrow$ Äquivalenzrelation.

$R_2 = \{(g_1, g_2) : g_1 \perp g_2\}$

- Schreiben $g_1 \perp g_2$ für $(g_1, g_2) \in R_2$
- **reflexiv:** $g \not\perp g$ nicht reflexiv
- **transitiv:** Skizze: !! $g_1 \perp g_2 \quad \wedge \quad g_2 \perp g_3 \Longrightarrow g_1 \parallel g_3 \Longrightarrow$ also $g_1 \not\perp g_3 \Longrightarrow$ nicht transitiv
- **symmetrisch:** Skizze: !! $g_1 \perp g_2 \Longrightarrow g_2 \perp g_1 \Longrightarrow$ symmetrisch

also $\Longrightarrow R_2$ symmetrisch.

Aufgabe 9

Wiederholung: Äquivalenz- und Ordnungsrelation.

Lösung:

(a) $R_1 = \{(m, n) \,|\, \exists k \in \mathbb{N} : m + n = 2k\}$

- **reflexiv:** Sei $m \in M \subset \mathbb{N}$. $m + m = 2m \Longrightarrow$ reflexiv
- **transitiv:** Sei $(m, n), (n, p) \in R_1 \Longrightarrow \exists k, l \in \mathbb{N}$ mit $m + n = 2k$ und $n + p = 2l$
  $\Longrightarrow \underbrace{m + p}_{\geq 2} = m + n + n + p - 2n = 2k + 2l - 2n = 2(\underbrace{k + l - n}_{\in \mathbb{N}}) \Longrightarrow R_1$ transitiv
- **symmetrisch:** Addition kommutativ $\Longrightarrow R_1$ symmetrisch

$\Longrightarrow R_1$ ist eine Äquivalenzrelation

(b) $R_2 = \{(m, n) : m/n = 2k; \quad k \in \mathbb{N}\}$.

- **irreflexiv:** Sei $m \in \mathbb{N}$, dann
  $$\frac{m}{m} = 1 = 2k \quad \Longleftrightarrow \quad k = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N},$$
  also $(m, m) \notin R_2$.
- **asymmetrisch:** Sei $(m, n) \in R_2$. Dann gilt aber:
  $$\frac{m}{n} = 2k \quad \Longrightarrow \quad \frac{n}{m} = \frac{1}{2k} = 2l \quad \Longrightarrow \quad l = \frac{1}{4k} \notin \mathbb{N},$$
  also $(n, m) \notin R_2$.

- **transitiv:** Sei $(m,n),(n,p) \in R_2$. Es folgt

$$\left(\frac{m}{n} = 2k\right) \wedge \left(\frac{n}{p} = 2l\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{m}{p} = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{p} = 2k2l = 2(2kl),$$

  und da $2kl \in \mathbb{N}$ gilt also $(m,p) \in R_2$.

$\Longrightarrow R_2$ ist eine strenge Ordnungsrelation (nicht vollständig).

(c) $R_3 = \{(m,n) \in M^2 : m \text{ teilt } n\}$. Schreiben $m \mid n$ für $(m,n) \in R_3$, insbesondere gilt also

$$m \mid n \iff \exists k \in \mathbb{N} : n = k \cdot m.$$

- **reflexiv:** Sei $m \in M$. $\frac{m}{m} = 1$, Rest $0 \Longrightarrow m \mid m \Longrightarrow R_3$ reflexiv
- **transitiv:** Sei $m \mid n \quad \wedge \quad n \mid p \Longrightarrow n = \underbrace{a}_{\in \mathbb{N}} \cdot m \quad \wedge \quad p = \underbrace{b}_{\in \mathbb{N}} \cdot n = \underbrace{a \cdot b}_{\in \mathbb{N}} \cdot m \Longrightarrow m \mid p \Longrightarrow$ transitiv
- **antisymmetrisch:** Sei $m \mid n \quad \wedge \quad n \mid m \Longrightarrow n = \underbrace{a}_{\in \mathbb{N}} \cdot m \quad \wedge \quad m = \underbrace{b}_{\in \mathbb{N}} \cdot n = \underbrace{a \cdot b}_{\in \mathbb{N}} \cdot m \Longrightarrow 1 = a \cdot b \Longrightarrow a = b = 1 \Longrightarrow m = n \Longrightarrow$ antisymmetrisch

$\Longrightarrow \; R_3$ ist Ordnungsrelation (nicht vollständig).