TU Chemnitz – Professur Analysis
Prof. Dr. Peter Stollmann
Dr. Martin Tautenhahn, Dipl.-Math. Clemens Bombach, Dipl.-Math. Christian Rebs

Mathematik I (für IF, ET und Ph)

Wintersemester 2019/20

2. Übung: Reelle Zahlen, vollständige Induktion und Abbildungen (Lösungen)

Aufgabe 1

Wiederholung: Infimum, Supremum, Minimum, Maximum.

Lösung:

(a) $M = [0, 1] \cup (2, 3)$ ist nach unten und oben beschränkt durch $\min M = 0$ und $\sup M = 3$.

(b) Wir erkennen, dass $\frac{m}{n} < \frac{n}{n}$, also ist $M = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m < n\right\}$ nach oben durch $\sup M = 1$ beschränkt. Weiterhin gilt $\frac{m}{n} \geq \frac{1}{n}$, also auch $\inf M \geq \inf\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Aus der Vorlesung folgt dann, dass M auch nach unten durch $\inf M = 0$ beschränkt ist.

In der Tat gilt $M = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$.

(c) Wir machen den Ansatz $\inf M = -1$ für die untere Schranke von $M = \left\{\dfrac{x-1}{x+1} : x \in [0, \infty)\right\}$:

$$-1 \leq \frac{x-1}{x+1} \iff -x - 1 \leq x - 1 \iff -x \leq x,$$

woraus sich $\inf M = -1$ bestätigt und insbesondere auch $\min M = -1$ ergibt, da $x \in [0, \infty)$. Weiterhin beobachten wir, dass $x - 1 < x + 1$ für $x \in \mathbb{R}$, woraus also $\sup M = 1$ folgt.

(d) Mit der üblichen Lösungsformel erhalten wir

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \iff \quad x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}.$$

Aus der nach oben geöffneten Parabelform folgern wir $M = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x - 4 < 0\right\} = (-1, 4)$, also $\inf M = -1$ und $\sup M = 4$.

(e) Wir erkennen, dass $f(x) = x^2 - x = x(x - 1)$ seine Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 1$ hat und eine nach oben geöffnete Parabel erzeugt. Das Minimum von f liegt genau in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen, also bei $x = 0.5$ mit dem Wert $f(x) = -\frac{1}{4}$. Es folgt für $M = \left\{\mathrm{e}^{x^2-x} : x \in \mathbb{R}\right\}$, dass $\min M = \frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}$. Aber M ist nach oben unbeschränkt.

Aufgabe 2

Lösung:

(a) $|x - 4| < 10$.

- **1. Fall:** $x \geq 4$. Dann gilt

$$|x - 4| = x - 4 < 10 \implies x < 14.$$

Also $x \in [4, 14)$ erfüllt Ungleichung.

- **2. Fall:** $x < 4$. Dann gilt

$$|x-4| = -x+4 < 10 \Longrightarrow x > -6.$$

  Also $x \in (-6,4)$ erfüllt Ungleichung.

$\Longrightarrow x \in (-6,14)$ erfüllt Ungleichung.

(b) $|1+2x| \geq 4$.

- **1. Fall:** $x \geq -1/2$. Dann gilt

$$|1+2x| = 1+2x \geq 4 \Longrightarrow x \geq 3/2 \geq -1/2.$$

  Also $x \geq 3/2$ erfüllt Ungleichung.

- **2. Fall:** $x < -1/2$. Dann gilt

$$|1+2x| = -1-2x \geq 4 \Longrightarrow \; -2x \geq 5 \Longrightarrow x \leq -5/2 < -1/2$$

  Also $x \leq -5/2$ erfüllt Ungleichung.

$\Longrightarrow x \in (-\infty,-5/2] \cup [3/2,+\infty)$ erfüllt Ungleichung.

(c) $|2x+1| = |x-1|+1$.

- **1. Fall:** $x \geq 1$. Dann gilt $|x-1| = x-1$ und $|2x+1| = 2x+1$.

$$2x+1 = x-1+1 \Longrightarrow x = -1 \not\geq 1.$$

  In diesem Fall keine Lösung. (mit Probe verdeutlichen)

- **2. Fall:** $-1/2 \leq x < 1$. Dann gilt $|x-1| = 1-x$ und $|2x+1| = 2x+1$.

$$2x+1 = 1-x+1 \Longrightarrow x = 1/3 \in [-1/2,1).$$

  $x = 1/3$ löst Gleichung.

- **3. Fall:** $x < -1/2$. Dann gilt $|x-1| = 1-x$ und $|2x+1| = -2x-1$.

$$-2x-1 = 1-x+1 \Longrightarrow x = -3 < -1/2$$

  $x = -3$ löst Gleichung.

$\Longrightarrow x \in \{-3, 1/3\}$ erfüllt Gleichung.

(d) $\left|\frac{x-3}{2x-5}\right| > 3 \iff |x-3| > 3\,|2x-5| \wedge |2x-5| \neq 0$.

- **1. Fall:** $x \geq 3$. Dann gilt $|x-3| = x-3$ und $|2x-5| = 2x-5$. Es folgt

$$x-3 > 3\,(2x-5) \Longrightarrow 12 > 5x \Longrightarrow x < 12/5 < 3.$$

  In diesem Fall keine Lösung. (mit Probe, z.B. für $x = 2$, verdeutlichen)

- **2. Fall:** $5/2 < x < 3$. Dann gilt $|x-3| = 3-x$ und $|2x-5| = 2x-5$. Es folgt

$$3-x > 3\,(2x-5) \Longrightarrow 18 > 7x \Longrightarrow x < \frac{18}{7}$$

  $5/2 < x < \frac{18}{7}$ erfüllt Ungleichung.

- **3. Fall:** $x < 5/2$. Dann gilt $|x-3| = 3-x$ und $|2x-5| = 5-2x$.

$$3 - x > 3\,(5-2x) \implies -12 > -5x \implies x > 12/5$$

  $12/5 < x < 5/2$ erfüllt Ungleichung.

$\implies x \in (2.4, 2.5) \cup (2.5, 18/7)$ erfüllt Unleichung.

Aufgabe 3

Lösung: Mittels Dreiecksungleichung gilt

$$|a| = |(a+b)+(-b)| \leq |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|.$$

Zeigen: $\big||a|-|b|\big| \leq |a+b|$.

- **1. Fall:** $|a| \geq |b|$. Dann gilt mit $|a| \leq |a+b| + |b|$

$$\big||a|-|b|\big| = |a| - |b| \leq |a+b| + |b| - |b| \leq |a+b|.$$

- **2. Fall:** $|b| > |a|$. Wir nutzen nun $|b| \leq |a| + |a+b|$ und erhalten

$$\big||a|-|b|\big| = -|a| + |b| \leq -|a| + |a| + |a+b| = |a+b|.$$

Aufgabe 4

Lösung:

(a) *Induktionsbeginn*: $n = 1$

Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 1 + 2 = 3 = 2^2 - 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Induktionsschritt: $n \to n+1$

Es gilt nach Induktionsannahme

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^j = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} 2^j}_{=2^{n+1}-1} + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1.$$

Also gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) *Induktionsbeginn*: $n = 1$

Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = (2 \cdot 1 - 1) = 1 = 1^2 = n^2.$$

Induktionsschritt: $n \to n+1$

Es gilt nach Induktionsannahme

$$\sum_{j=1}^{n+1} (2j-1) = \sum_{j=1}^{n} (2j-1) + \underbrace{(2(n+1)-1)}_{=2n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Also gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) *Induktionsbeginn*: $n = 1$

Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{n}{n+1}.$$

Induktionsschritt: $n \to n+1$

Es gilt nach Induktionsannahme

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2}.\end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5

Für $n = 1$ und $n = 4$ stimmt die Aussage ($1 \leq 1$ und $7 \leq 8$), für $n = 2, 3$ nicht ($3 \not\leq 2$ und $5 \not\leq 4$).
Der Fehler im Beweis ist der Induktionsschritt

$$2^{n-1} + 2 \leq 2^{n-1} + 2^{n-1}.$$

Dies gilt nur für $n \geq 2$, aber nicht $n = 1$!

Die korrekte Behauptung ist also: „Für alle natürlichen $n \geq 4$ gilt: $2n - 1 \leq 2^{n-1}$.“
Und der korrekte Beweis hat als Induktionsbeginn $n = 4$.

Aufgabe 6

- eine Funktion ist eine eindeutige Abbildung
- f surjektiv : $\Longleftrightarrow \forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y$
- f injektiv : $\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$
- f bijektiv : $\Longleftrightarrow$ f surj. und f inj.

a)
- $$\begin{tikzcd} \overbrace{\qquad}^{X} & \overbrace{\qquad}^{Y} \\ a \arrow[r] & 1 \\ b \arrow[ur] & 2 \end{tikzcd}$$ $f_1(a) = f_1(b) = 1$, nicht inj., da $a \neq b$, nicht surj. da $\nexists x \in X$ mit $f(x) = 2$
- $$\begin{tikzcd} a \arrow[dr] & 1 \\ b \arrow[r] & 2 \end{tikzcd}$$ analog

- $\boxed{\begin{tikzcd} a \arrow[r] & 1 \\ b \arrow[r] & 2 \end{tikzcd}}$ ist inj. und surj. also auch bij.
- $\boxed{\begin{tikzcd} a \arrow[dr] & 1 \\ b \arrow[ur] & 2 \end{tikzcd}}$ ist inj. und surj. also auch bij.

b)
- $\boxed{\begin{tikzcd} \overbrace{}^{X} & \overbrace{}^{Y} \\ a \arrow[r] & 1 \\ & 2 \\ & 3 \end{tikzcd}}$ inj. aber nicht surj. da $\nexists x \in X$ mit $f(x) = 2$
- $\boxed{\begin{tikzcd} a \arrow[dr] & 1 \\ & 2 \\ & 3 \end{tikzcd}}$ inj. aber nicht surj. da $\nexists x \in X$ mit $f(x) = 1$
- $f(a) = 3$ analog

c) nur eine Möglichkeit:

$\boxed{\begin{tikzcd} \overbrace{}^{X} & \overbrace{}^{Y} \\ a \arrow[r] & 1 \\ b \arrow[ur] & \end{tikzcd}}$ nicht inj. da $f(a) = f(b) = 1$, aber $a \neq b \implies$ nicht bij., aber surj.

Aufgabe 7

a)
- inj.: $e^{x_1} = e^{x_2} \implies 1 = \frac{e^{x_2}}{e^{x_1}} = e^{x_2 - x_1} \iff 0 = x_2 - x_1 \iff x_2 = x_1 \implies$ f inj.
- surj.: $e^x > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \implies \nexists x \in A$ mit $e^x = -1 \in B \implies$ nicht surj. $\implies$ nicht bij.
- Einschr.: $A' = A,\; B' = (0, \infty),\; f^{-1}(x) = \ln x$

b)
- inj.: $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \implies \left(\sqrt{x_2}\right)^2 = \left(\sqrt{x_1}\right)^2 \iff x_1 = x_2 \implies$ f inj.
- surj.: $\sqrt{x} \geq 0 \; \forall x \in A \implies \nexists x \in A$ mit $\sqrt{x} = -1 \in B \implies$ nicht surj. $\implies$ nicht bij.
- Einschr.: $A' = A,\; B' = A,\; f^{-1}(x) = x^2$

c)
- inj.: $\sin x = \sin(x + 2\pi) \implies$ f nicht inj. $\implies$ nicht bij.
- surj.: $\sin x \in [-1, 1] \; \forall x \in A \implies \nexists x \in A$ mit $\sin x = 2 \in B \implies$ nicht surj.
- Einschr.: $A' = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\; B' = [-1, 1],\; f^{-1}(x) = \arcsin x$

d)
- inj.: $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \implies \cos x_1 > 0, \cos x_2 > 0$

$$\begin{aligned}0 = \tan x_1 - \tan(x_2) &= \frac{\sin x_1}{\cos x_1} - \frac{\sin x_2}{\cos x_2} \\ &= (\cos x_1 \cdot \cos x_2)^{-1} (\sin x_1 \cdot \cos x_2 - \sin x_2 \cdot \cos x_1) \\ &= c \cdot \sin (\underbrace{x_1 - x_2}_{\in(-\pi,\pi)}) \iff x_1 - x_2 = 0 \iff x_1 = x_2\end{aligned}$$

  $\implies f$ inj.
- surj.: $\tan\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathbb{R} = B \implies f$ surj.
- Einschr.: $A' = A,\ B' = B,\ f^{-1}(x) = \arctan x$

e) $A = B = \mathbb{N}, f(n) = n^2$

- inj.: $n_1, n_2 > 0, n_1^2 = n_2^2 \iff n_1 = n_2 \implies f$ inj.
- surj.: Nein, da kein $n \in \mathbb{N}$ ex. mit $n^2 = 2$ bzw. $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$
- Einschr.: $A' = A,\ B' = f(A),\ f^{-1}(n) = \sqrt{n}$

f) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Q}, f(n) = \frac{1}{n}$

- inj.: $\frac{1}{n_1} = \frac{1}{n_2} \iff n_2 = n_1 \implies f$ inj.
- surj.: Nein, da kein $n \in \mathbb{N}$ ex. mit $\frac{1}{n} = \frac{3}{4} \in \mathbb{Q} = B$ bzw. $\frac{4}{3} \notin \mathbb{N}$
- Einschr.: $A' = A,\ B' = f(A),\ f^{-1}(n) = \frac{1}{n}$

g) $A = B = \mathbb{R}, f(n) = |2x - 4| = 2|x - 2|$

- inj.: nein, da $f(0) = 4 = f(4)$
- surj.: Nein, da kein $x \in \mathbb{R}$ ex. mit $f(x) = -1 \in \mathbb{R} = B$
- Einschr.: $A'_+ = [2, \infty)$ $B' = f(A) = [0, \infty)$, $f_+^{-1}(n) = \frac{x}{2} + 2$ oder
  $A'_- = (-\infty, 2], B'_- = [0, \infty),\ f_-^{-1}(n) = -\frac{x}{2} + 2$