

## **Mathematik I (für IF, ET und Ph)**

Wintersemester 2019/20

### 2. Übungsblatt: Reelle Zahlen, vollständige Induktion und Abbildungen

#### **Aufgabe 1**

Bestimmen Sie, ob die folgenden Mengen nach unten und/oder oben beschränkt sind und geben Sie in den entsprechenden Fällen das Infimum bzw. Supremum an.

(a)  $M = [0, 1] \cup (2, 3)$ ,

(b)  $M = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m < n \right\}$ ,

(c)  $M = \left\{ \frac{x-1}{x+1} : x \in [0, \infty) \right\}$ ,

(d)  $M = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x - 4 < 0\}$ ,

(e)  $M = \{e^{x^2-x} : x \in \mathbb{R}\}$ .

#### **Aufgabe 2**

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen  $x$ , für die gilt:

(a)  $|x - 4| < 10$ ,      (b)  $|1 + 2x| \geq 4$ ,      (c)  $|2x + 1| = |x - 1| + 1$ ,      (d)  $\left| \frac{x-3}{2x-5} \right| > 3$ .

#### **Aufgabe 3**

Warum gilt für reelle Zahlen  $a, b$  immer  $|a| \leq |a + b| + |b|$ ? Weisen Sie damit nach, dass

$$||a| - |b|| \leq |a + b|.$$

#### **Aufgabe 4**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

(a)  $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ,

(b)  $\sum_{j=1}^n (2j - 1) = n^2$ ,

(c)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ .

### Aufgabe 5

Wo ist der Fehler in folgender vollständigen Induktion? Überprüfen Sie die Behauptung für  $n = 1, 2, 3, 4$  und korrigieren Sie die Induktion.

Behauptung: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $2n - 1 \leq 2^{n-1}$ .

Beweis: Beweis durch vollständige Induktion über  $n$ .

- *Induktionsbeginn:*  $n = 1$

Für  $n = 1$  ist  $2n - 1 = 1 = 2^0$ .

- *Induktionsschritt:*  $n \rightarrow n + 1$

Es ist  $2(n + 1) - 1 = (2n - 1) + 2$ . Nach Induktionsannahme folgt:

$$(2n - 1) + 2 \leq 2^{n-1} + 2 \leq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n.$$

Also gilt die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

### Aufgabe 6

Geben Sie alle Funktionen  $f: X \rightarrow Y$  an und untersuchen Sie diese auf die Eigenschaften *injektiv*, *surjektiv*, *bijektiv*!

- (a)  $X = \{a, b\}$ ,  $Y = \{1, 2\}$ ,
- (b)  $X = \{a\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3\}$ ,
- (c)  $X = \{a, b\}$ ,  $Y = \{1\}$ .

### Aufgabe 7

Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen  $f: A \rightarrow B$  *injektiv*, *surjektiv* oder *bijektiv* sind. Geben Sie notfalls Einschränkungen  $A'$ ,  $B'$  von  $A$  bzw.  $B$  an, so dass  $f: A' \rightarrow B'$  bijektiv wird.

Bestimmen Sie dann die Umkehrfunktion  $f^{-1}: B' \rightarrow A'$ .

- (a)  $A = B = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$
- (b)  $A = [0, \infty)$ ,  $B = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$
- (c)  $A = B = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$
- (d)  $A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $B = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \tan x$
- (e)  $A = B = \mathbb{N}$ ,  $f(n) = n^2$
- (f)  $A = \mathbb{N}$ ,  $B = \mathbb{Q}$ ,  $f(n) = \frac{1}{n}$
- (g)  $A = B = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |2x - 4|$