

Mathematik I (für IF, ET und Ph)

Wintersemester 2019/20

3. Übungsblatt: Komplexe Zahlen (Lösungen)

Aufgabe 1

Wiederholung: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Betrag und Konjugation komplexer Zahlen

Lösung: $z_1 = 2 - 2i$ und $z_2 = 1 + 3i$.

$$(a) i^n = \begin{cases} i, & n = 4k + 1 \\ -1, & n = 4k + 2 \\ -i, & n = 4k + 3 \\ 1, & n = 4k \end{cases}$$

$$(b) z_1 + z_2 = 3 + i$$

$$(c) z_1 - z_2 = 1 - 5i$$

$$(d) \bar{z}_1 + z_1 = 2 \operatorname{Re}(z_1) = 4$$

$$(e) z_1 z_2 = (2 - (-6)) + (6 + (-2))i = 8 + 4i$$

$$(f) z_2 \bar{z}_2 = |z_2|^2 = (1^2 + 3^2) = 10$$

$$(g) 4z_1 - iz_2 = (8 - 8i) - (-3 + i) = 11 - 9i$$

$$(h) \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(2-6) - (6+2)i}{10} = -\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$$

$$(i) |z_1|z_2 = 2\sqrt{2}(1 + 3i) = 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2}i$$

$$(j) |z_1 z_2| = |8 + 4i| = \sqrt{64 + 16} = 2\sqrt{20}$$

$$(k) z_1^3 = (-8i) \cdot z_1 = -16 - 16i$$

$$(l) z_1^{-1} = \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} = \frac{2+2i}{8} = \frac{1}{4} + \frac{i}{4}$$

$$(m) z_2^{-2} = \frac{\bar{z}_2^2}{|z_2|^2} = \frac{-8-6i}{100} = -\frac{2}{25} - \frac{3}{50}i$$

$$(n) \frac{1+i^{-1}}{1-i^{-3}} = \frac{1+(-i)}{1-(-i)^3} = \frac{1-i}{1-i} = 1$$

Aufgabe 2

Sei $z = x + iy$ und $w = u + iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.

$$(a) \overline{z - w} = \overline{(x - u) + (y - v)i} = (x - u) + (v - y)i = (x - iy) - (u - iv) = \bar{z} - \bar{w}$$

$$(b) z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = (x^2 + y^2) + (-xy + yx)i = (x^2 + y^2) = |z|^2$$

$$(c) \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}((x + iy) - (x - iy)) = \frac{2yi}{2i} = y = \operatorname{Im}(z)$$

$$(d) \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{z\bar{w}}{|w|^2}\right)} = \frac{\bar{z}w}{|w|^2} = \frac{\bar{z}w}{|\bar{w}|^2} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

Aufgabe 3

$z = x + iy$.

- (a) $\text{Im}(z) \geq -1 \Leftrightarrow y \geq -1$, ist Halbebene.
 (b) $|z| \leq \text{Re}(z) = 1 \Leftrightarrow |z| = \text{Re}(z)$, das ist der nichtnegative Teil der reellen Achse.
 (c) $|z - i| \leq 2$ und $|z + i| \leq 2$ ist Schnitt der Kreisscheiben um i und $-i$ mit Radius jeweils 2.
 (d) $\bar{z} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1$ ist Einheitskreis.
 (e) $\left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right| = 1 \Leftrightarrow |z - z_1| = |z - z_2|$, Mittelsenkrechte zwischen z_1 und z_2 .

Aufgabe 4

Wiederholung: Argument und Polarform

Lösung:

$$z_1 = \frac{\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) + 3 - 5i}{2 - i} = \frac{(3 - 4i)(2 + i)}{|2 - i|^2} = \frac{10 - 5i}{5} = 2 - i$$

$$z_2 = 2(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi)) = 2e^{i\varphi}e^{i3\varphi} = 2e^{i4\varphi}.$$

Aufgabe 5

Wiederholung: Polarform (trigonometrisch, exponentiell) und Rechenregeln dafür

Lösung:

- (a) Trigonometrische und Exponentialform - Algebraische Form, $z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) =: r \cdot e^{i\varphi}$.

- $z_1 = 3(\cos(0) + i \sin(0)) = 3e^{i0}$
- $z_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2e^{i\pi}$
- $z_3 = 3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$
- $z_4 = 5(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) = 5e^{i\frac{3\pi}{2}}$
- $z_5 = 2(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}) = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$
- $z_6 = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$
- $z_7 = 3(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi) = 3e^{i\frac{7}{4}\pi}$
- $z_8 = 2(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}) = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$
- $z_9 = (\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}) = e^{i\frac{5\pi}{3}}$
- $z_{10} = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$

- (b) Berechnung mit Exponentialform & algebraische Darstellung

- $z_7 z_8 = 3e^{i\frac{7}{4}\pi} \cdot 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 6e^{i(\frac{7}{4} + \frac{5}{4})\pi} = 6e^{i3\pi} = 6e^{i\pi} = -6$
- $\frac{z_8^2}{z_7} = \frac{(2e^{i\frac{5\pi}{4}})^2}{3e^{i\frac{7}{4}\pi}} = \frac{4e^{i\frac{10\pi}{4}}}{3e^{i\frac{7}{4}\pi}} = \frac{4}{3}e^{i\frac{10-7}{4}\pi} = \frac{4}{3}e^{i\frac{3}{4}\pi} = \frac{4}{3}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i \sin(\frac{3}{4}\pi)) = \frac{4}{6}(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})$
- $z_{10}^{10} = 2^5 e^{i\frac{3\pi}{2}} = -32i$
- $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n+2}} = \frac{(\sqrt{2})^n e^{in\pi/4}}{(\sqrt{2})^{n+2} e^{-i(n+2)\pi/4}} = \frac{(\sqrt{2})^n e^{in\pi/4} \cdot (\sqrt{2})^{n+2} e^{i(n+2)\pi/4}}{2^{n+2}} = \frac{(\sqrt{2})^{2n+2}}{2^{n+2}} e^{2(n+1)i\pi/4} = \frac{1}{2} i^{n+1}.$

Aufgabe 6

Wiederholung: Potenzieren und Radizieren komplexer Zahlen

Lösung: Zur Lösung einer Gleichung der Form $z^n = v$ bestimmt man zunächst $R := |v|$ und $\varphi := \arg(v)$ und ermittelt dann die n Lösungen

$$z_k = r(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

wobei $r = \sqrt[n]{R}$ und $\varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}(k-1) = \frac{\varphi + 2\pi(k-1)}{n}$ ist.

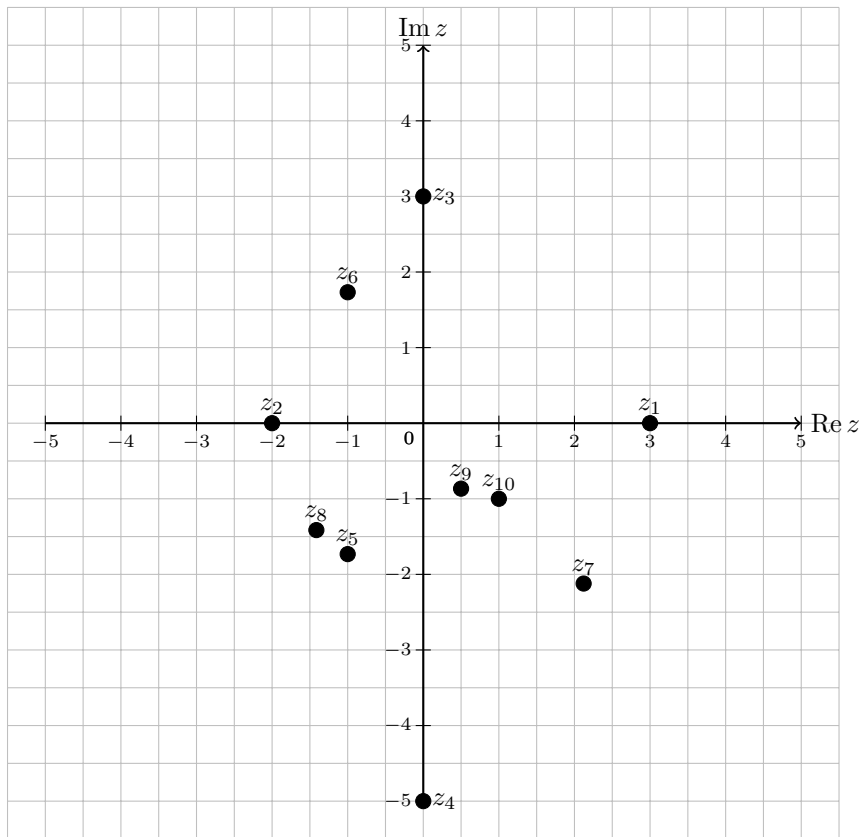


Abbildung 1: Punkte z_1, \dots, z_{10} aus Aufgabe 4.

(a) $z^4 = i \Rightarrow R = 1, \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 1, \varphi_1 = \frac{\pi}{8}, \varphi_2 = \frac{5\pi}{8}, \varphi_3 = \frac{9\pi}{8}, \varphi_4 = \frac{13\pi}{8}$

(b) $R = \sqrt{\sqrt{8^2} + \sqrt{8^2}} = \sqrt{16} = 4$ und $\varphi = \tan^{-1}(1) = \pi/4$. Also $r = \sqrt[3]{4}$ und $\varphi_1 = \frac{\varphi}{3} = \frac{\pi}{12}, \varphi_2 = \frac{\varphi}{3} + \frac{2}{3}\pi = \frac{3}{4}\pi, \varphi_3 = \frac{\varphi}{3} + \frac{4}{3}\pi = \frac{17}{12}\pi$.

(c) $z = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow R = 1, \varphi = \arctan(1) = \pi/4 \Rightarrow z^n = 1^n e^{in\pi/4} = \cos(n\pi/4) + i \sin(n\pi/4)$
 $\Rightarrow z^n = 1$ für alle $\{n : n = 8k, k \in \mathbb{N}_0\}$.

Aufgabe 7

Wiederholung: pq-Formel bzw. komplexe Polynome und deren Nullstellen

Lösung:

(a) Mit p - q -Formel folgt $z_{1/2} = -1 + (1 - 3)^{\pm} = -1 + \sqrt{-2} = -1 \pm \sqrt{2}i$.

(b) p - q -Formel: $z = \frac{-2i}{2} + \sqrt{i^2 - (-1 + 2i)} = i + \sqrt{-2i}$.

Dann die Wurzeln w_0, w_1 von $-2i$ berechnen: $|-2i| = 2, \arg(-2i) = \frac{3}{2}\pi$, also

$$w_0 = \sqrt{2} \exp\left(i\frac{3}{4}\pi\right) = -1 + i, \quad w_1 = \sqrt{2} \exp\left(i\frac{7}{4}\pi\right) = 1 - i.$$

Es ergibt sich

$$z_1 = i + w_0 = i - 1 + i = -1 + 2i, \quad z_2 = i + w_1 = i + 1 - i = 1.$$

Alternativ: Substituiere $w := z - i$, löse $w^2 = -2i$ und resubstituiere $z = w + i$.

Ergebnis: $w_1 = -1 + i, w_2 = 1 - i \Rightarrow z_1 = -1 + 2i, z_2 = 1$

(c) Substitution: $w = z^3 \implies w^2 - 2w + 2 = 0$.

p-q-Formel: $w_{1/2} = 1 + \sqrt{1-2} = 1 + \sqrt{-1} = 1 \pm i$.

Dann 3. Wurzeln von $1 \pm i$ berechnen:

$$z^3 = 1 + i \implies z_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{1}{12}\pi}, z_2 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{9}{12}\pi}, z_3 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17}{12}\pi}$$

$$z^3 = 1 - i \implies z_4 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{7}{12}\pi}, z_5 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{13}{12}\pi}, z_6 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{23}{12}\pi}$$

Alternativ:

1. Substitution: $w := z^3$, löse $w^2 - 2w + 2 = 0$. Brauchen hierzu

2. Substitution: $u := w - 1$, löse $u^2 = -1 \implies u_1 = i, u_2 = -i$.

2. Rücksubstitution: $w = u + 1 \implies w_1 = 1 + i, w_2 = 1 - i$.

1. Rücksubstitution: Löse $z^3 = w$ für $w = w_1$ und $w = w_2$.

$$z^3 = w_1, R = \sqrt[6]{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\implies r = \sqrt[6]{2}, \varphi_1 = \frac{\pi}{12}, \varphi_2 = \frac{9\pi}{12}, \varphi_3 = \frac{17\pi}{12}$$

$$z^3 = w_2, R' = \sqrt[6]{2}, \varphi' = -\frac{\pi}{4}$$

$$\implies r' = \sqrt[6]{2}, \varphi'_1 = -\frac{\pi}{12}, \varphi'_2 = -\frac{9\pi}{12}, \varphi'_3 = -\frac{17\pi}{12}$$

(d) Wir formen um und wenden die binomischen Formeln an:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+z}{2-z}\right)^2 = -1 &\iff (1+z)^2 = -(2-z)^2 &\iff 1+2z+z^2 = -4+4z-z^2 \\ &\iff 2z^2 - 2z + 5 = 0 \end{aligned}$$

Division durch 2 und Anwendung der pq-Formel ergibt

$$z_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2.5} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1-10}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i.$$