TU Chemnitz – Professur Analysis
Prof. Dr. Peter Stollmann
Dr. Martin Tautenhahn, Dipl.-Math. Clemens Bombach, Dipl.-Math. Christian Rebs

Mathematik I (für IF, ET und Ph)

Wintersemester 2019/20

3. Übungsblatt: Komplexe Zahlen

Aufgabe 1

Es seien $z_1 = 2 - 2i$ und $z_2 = 1 + 3i$. Berechnen Sie

(a) i^n, (b) $z_1 + z_2$, (c) $z_1 - z_2$, (d) $\overline{z_1} + z_1$, (e) $z_1 z_2$, (f) $z_2 \overline{z_2}$, (g) $4z_1 - iz_2$, (h) $\frac{z_1}{z_2}$,

(i) $|z_1| z_2$, (j) $|z_1 z_2|$, (k) z_1^3, (l) z_1^{-1}, (m) z_2^{-2}, (n) $\dfrac{1 + i^{-1}}{1 - i^{-3}}$.

Aufgabe 2

Bestätigen Sie folgende Beziehungen für $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$, (b) $z\bar{z} = |z|^2$, (c) $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$, (d) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

Aufgabe 3

Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen in der GAUSS'schen Zahlenebene!

(a) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq -1\}$, (b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \operatorname{Re}(z)\}$, (c) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq 2$ und $|z + i| \leq 2\}$,

(d) $\left\{z \in \mathbb{C} : \overline{z} = \dfrac{1}{z}\right\}$, (e) $\left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = 1\right\}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $z_1 \neq z_2$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl

$$z_1 = \frac{\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) + 3 - 5i}{2 - i}.$$

Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ gegeben. Welchen Betrag und welches Argument besitzt die komplexe Zahl

$$z_2 = 2(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)) \text{ ?}$$

Aufgabe 5

Es seien

$$z_1 = 3, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = 3i, \quad z_4 = -5i, \quad z_5 = -1 - i\sqrt{3}, \quad z_6 = \overline{z_5},$$
$$z_7 = 3\mathrm{e}^{-i\pi/4}, \quad z_8 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad z_9 = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}, \quad z_{10} = 1 - i.$$

(a) Zeichnen Sie die Zahlen in die GAUSS'sche Zahlenebene ein und geben Sie jeweils beide Polardarstellungen (trigonometrisch & exponentiell) an!

(b) Berechnen Sie folgende Ausdrücke mit Hilfe der Exponentialdarstellung und geben Sie das Ergebnis in kartesischer Form an!

$$z_7 z_8, \quad \frac{z_8^2}{z_7}, \quad z_{10}^{10}, \quad \frac{\overline{z_{10}}^n}{z_{10}^{n+2}}.$$

Aufgabe 6

(a) Berechnen Sie die vierten Wurzeln der imaginären Einheit i.

(b) Lösen Sie $z^3 = \sqrt{8} + \sqrt{8}i$.

(c) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, für die die komplexe Zahl $z = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}$ die Gleichung $z^n = 1$ erfüllt.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen:

(a) $z^2 + 2z + 3 = 0,$

(b) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0,$

(c) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0,$

(d) $\left(\frac{z+1}{2-z}\right)^2 = -1.$