

Mathematik I (für IF, ET und Ph)

Wintersemester 2019/20

4. Übungsblatt: Vektorräume und lineare Unabhängigkeit (Lösungen)

Aufgabe 1

Wiederholung: Unterraum

Lösung:

- (a) $U = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}$. Es seien $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U$ mit $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, dann folgt

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_3 := \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

und da

$$x_3 = (x_1 + x_2) = (2y_1 + 2y_2) = 2(y_1 + y_2) = 2y_3$$

gilt $\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in U$.

Sei nun weiterhin $\lambda \in \mathbb{R}$, dann erhalten wir $\lambda \cdot \mathbf{x}_1 = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ und erneut

$$\lambda x_1 = \lambda(2y_1) = 2(\lambda y_1) \implies \lambda \cdot \mathbf{x}_1 \in U.$$

Also ist U ein Unterraum. In der Tat ist es eine Ebene, parallel zur z -Achse.

- (b) $U = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 0\}$. Es seien wieder $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U$ mit $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, zwar gilt dann für $(x_3, y_3, z_3) = \mathbf{x}_3 := \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$

$$x_3 + y_3 + z_3 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = \underbrace{(x_1 + y_1 + z_1)}_{\leq 0, \text{ da } \mathbf{x}_1 \in U} + \underbrace{(x_2 + y_2 + z_2)}_{\leq 0, \text{ da } \mathbf{x}_2 \in U} \leq 0 \implies \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in U,$$

aber mit $\lambda = -1$ und $\mathbf{x} = (-1, -2, -3) \in U$, folgt z.B. $(-1) \cdot \mathbf{x} = (1, 2, 3)^T \notin U$. Damit ist U kein Unterraum. U ist der "schräg-unterer" Halbraum des \mathbb{R}^3 .

- (c) $U = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\} = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \vee y = 0\}$. Sei $\mathbf{x}_1 = (0, 1, 1) \in U$ und $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 1) \in U$, dann gilt $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = (1, 1, 2) \notin U$. Damit ist U kein Unterraum. Geometrisch ist U die Vereinigung der xz - mit der yz -Ebene.

Aufgabe 2

Wiederholung: Lineare Unabhängigkeit

Lösung:

- (a) Wir machen den Ansatz:

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{a} + \lambda_2 \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten $\lambda_2 = -2\lambda_1$ und $\lambda_1 = -2\lambda_2$, was wiederum auf $\lambda_2 = 4\lambda_1$ führt. Also ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und die Vektoren sind somit linear unabhängig.

- (b) Wir machen den Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix} = \mathbf{z} = \lambda_1 \mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix}$$

und erhalten aus den ersten beiden Komponenten sofort $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 - \lambda_2) = -1$. D.h., nur für $t = \lambda_2 - \lambda_1 = 4$ sind die drei Vektoren linear abhängig, sonst unabhängig.

(c) 3 Vektoren in \mathbb{R}^2 sind immer linear abhängig, da $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

Aufgabe 3

(a) Es ist klar, dass $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Da $\dim U = n$ muss es n linear unabhängige Vektoren $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^n$ geben, so dass $U = \text{span}(\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\})$. Allerdings kann ich jeden Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ aus n linear unabhängigen Basisvektoren bauen. Folglich gilt also $V \subset \text{span}(\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}) = U$, also $U = V$.

(b) Wir untersuchen zunächst, ob \mathbf{b}_1 und \mathbf{b}_2 linear unabhängig sind und machen dazu den Ansatz:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}_2 = \lambda \cdot \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Dies führt aber auf den Widerspruch, dass $\lambda = 2$ (2. Komponente) und $\lambda = 5/2$ (1. Komponente). Ergo, sind die Vektoren linear unabhängig. Aus Teilaufgabe (a) und $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ folgt automatisch, dass $\text{span}(\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}) = \mathbb{R}^2$.

Insbesondere kann ein Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top$ dargestellt werden als Linearkombination

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x} = \lambda_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + 5\lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix}$$

wobei sich λ_1, λ_2 ergeben aus $\lambda_1 = x_2 - 2\lambda_2$ und

$$x_1 = 5\lambda_2 + 2(x_2 - 2\lambda_2) = 2x_2 + \lambda_2$$

also

$$\lambda_2 = x_1 - 2x_2, \quad \lambda_1 = x_2 - 2(x_1 - 2x_2) = 5x_2 - 2x_1.$$

(c) $\text{span}(\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\})$ ist gerade die xy -Ebene des \mathbb{R}^3 und entsprechend würde z.B. $\mathbf{c} = (0, 0, 1)^T$ eine Basis $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ des \mathbb{R}^3 liefern.

Aufgabe 4

(a)

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B - 3A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -8 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 2 \\ 11 & 8 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^\top \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C \cdot A = \begin{pmatrix} 19 & -5 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad E \cdot F = (8), \quad F \cdot E = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F \cdot C \text{ n. def.}, \quad (A \cdot C) \cdot F = A \cdot (C \cdot F) = \begin{pmatrix} 16 \\ 45 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad B^2 \text{ n. def.}, \quad D^3 = \begin{pmatrix} 25 & 50 \\ 50 & 100 \end{pmatrix} = 25D.$$

(b) Alle möglichen Matrixprodukte:

	A	B	C	D	E	F	G	H
A			✓	✓				
B			✓	✓				
C	✓	✓				✓	✓	✓
D			✓	✓				
E	✓	✓				✓	✓	✓
F					✓			
G	✓	✓				✓	✓	✓
H	✓	✓				✓	✓	✓

(c) Sei $Y = [y_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$$e_i^T \cdot Y = (y_{i1} \quad y_{i2} \quad \cdots \quad y_{in}) \text{ (i-te Zeile), } Y \cdot e_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{nj} \end{pmatrix} \text{ (j-te Spalte), } e_i^T \cdot Y \cdot e_j = y_{ij}$$

Aufgabe 5

(a) Überprüfen der Eigenschaften für lineare Abbildungen (Bild der Summe ist Summe der Bilder und Bild des Vielfachen ist Vielfaches des Bildes).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$