TU Chemnitz – Professur Analysis
Prof. Dr. Peter Stollmann
Dr. Martin Tautenhahn, Dipl.-Math. Clemens Bombach, Dipl.-Math. Christian Rebs

Mathematik I (für IF, ET und Ph)

Wintersemester 2019/20

4. Übungsblatt: Vektorräume, lineare Unabhängigkeit und Matrizen

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob U ein Teilraum des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ ist, und beschreiben Sie die Menge U geometrisch:

(a) $U = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}$,

(b) $U = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 0\}$,

(c) $U = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$.

Aufgabe 2

Sind die folgenden Vektoren linear abhängig oder unabhängig?

(a) $\boldsymbol{a} = (2, 1, 0)^\top$ und $\boldsymbol{b} = (1, 2, 0)^\top$,

(b) $\boldsymbol{x} = (2, 0, -1)^\top,\ \boldsymbol{y} = (1, 1, 1)^\top,\ \boldsymbol{z} = (1, 3, t)^\top$ in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$,

(c) drei beliebige Vektoren des $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3

(a) Sei U ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$ und habe die Dimension $\dim U = n$. Was können Sie dann über U aussagen?

(b) Man zeige, dass die Vektoren $\boldsymbol{b}_1 = (2, 1)^\top$ und $\boldsymbol{b}_2 = (5, 2)^\top$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden. Wie lauten die *Koordinaten* eines Vektors $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ bzgl. der Basis $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$?

(c) Es seien die Vektoren $\boldsymbol{a} = (2, 1, 0)^\top$ und $\boldsymbol{b} = (1, 2, 0)^\top$ wie in Aufgabe 3(a). Ergänzen Sie $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad G = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -6 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie, sofern definiert,

$A+B,\quad B-3A,\quad A\cdot C,\quad A^\top\cdot B,\quad C\cdot A,\quad E\cdot F,\quad F\cdot E,\quad F\cdot C,\quad (A\cdot C)\cdot F,\quad A\cdot(C\cdot F),\quad B^2,\quad D^3.$

(b) Welche weiteren Matrizenprodukte aus diesen Matrizen sind möglich? (Ohne Transponieren.)

(c) Es sei $\boldsymbol{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top$ die i-te Spalte der Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Was sind die Ergebnisse der Produkte $\boldsymbol{e}_i^\top \cdot Y$, $Y \cdot \boldsymbol{e}_j$ und $\boldsymbol{e}_i^\top \cdot Y \cdot \boldsymbol{e}_j$?

Aufgabe 5

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung linear ist, und geben Sie deren Abbildungsmatrix an:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x + y + z.$$

(b) Geben Sie die Abbildungsmatrix der folgenden linearen Abbildung an:

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ x - y \\ 2y \end{pmatrix}.$$