TU Chemnitz – Professur Analysis
Prof. Dr. Peter Stollmann
Dr. Martin Tautenhahn, Dipl.-Math. Clemens Bombach, Dipl.-Math. Christian Rebs

Mathematik I (für IF, ET und Ph)

Wintersemester 2019/20

5. Übung: Matrizen und lineare Gleichungssysteme (Lösungen)

Aufgabe 1

Wiederholung: Gauß-Algorihtmus

Lösung: Mittels Gauß-Algorithmus erhalten wir innerhalb von zwei Schritten

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tilde{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tilde{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix besitzt also Rang 2, was gleichbedeutend mit der Dimension des Unterraumes ist.

Aufgabe 2

Wiederholung: Lösbarkeit von LGS.

Lösung: Wir wenden jeweils den Gauß-Algorithmus auf die erweiterte Koeffizientenmatrix $X = [A|\boldsymbol{b}]$ an. Gegebenenfalls werden anfangs Zeilen vertauscht um das Rechnen zu erleichtern.

(a) Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar mit der Lösung $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = -2$:

$$\tilde{X}_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & -6 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{X}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -10 \\ 0 & -3 & 9 & -18 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{X}_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar mit der Lösung $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = -2$.

(b) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen:

$$X = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & -5 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{X}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 10 & -14 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{X}_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Lösungsmenge L ist z.B. durch

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -8/5 \\ 7/5 \\ 1 \end{pmatrix} t : t \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben.

(c) Das Gleichungssystem ist unlösbar:

$$X = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 17 & 7 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{X}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 17 & 1 \\ 0 & 5 & 17 & 7 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{X}_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

(d) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen:

$$\tilde{X}_0 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{X}_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & -10 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Als spezielle Lösung finden wir z.B. $\boldsymbol{x}_s = (2, 0, 0, 1)^\top$ und als Nullraum ergibt sich

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 17 \\ -1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Lösungsmenge L ist somit z.B. durch

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 \\ -1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben.

Aufgabe 3

Lösung: In dem man den Parameter α in der Koeffizientenmatrix beim Gauß-Algorithmus so lange wie möglich unangetastet lässt (indem man ihn z.B. nach rechts unten permutiert), erhält man

$$\tilde{X}_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \alpha & -\beta \end{array} \right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{X}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & -5 & 5 & 10 \\ 0 & -1 & \alpha+2 & 4-\beta \end{array} \right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{X}_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & -5 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 2-\beta \end{array} \right)$$

Damit ergibt sich

(a) eindeutige Lösung für $\alpha \neq -1$ und $\beta \in \mathbb{R}$

(b) keine Lösung für $\alpha = -1$ und $\beta \neq 2$

(c) unendlich viele Lösungen für $\alpha = -1$ und $\beta = 2$. In diesem Fall ist die Lösungsmenge L z.B. durch

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. (Man beachte die Vertauschung von x_2 und x_3 vom Anfang.)

Aufgabe 4

Lösung: Durch den Gauß-Algorithmus ergibt sich

$$\tilde{X}_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & \alpha & 1 \\ -2\alpha & \alpha & 9 & 6 \end{array} \right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{X}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-1 & 1 \\ 0 & 2\alpha & 9+\alpha & 6 \end{array} \right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{X}_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-1 & 1 \\ 0 & 0 & 9-2\alpha^2+3\alpha & 7-\alpha \end{array} \right)$$

Damit das Gleichungssytem eindeutig lösbar ist, muss der Koeffizient in der dritten Zeile vor x_3 nicht Null sein. Mittels p-q-Formel ergibt sich, dass der Koeffizient für $\alpha = 3$ und $\alpha = -3/2$ Null wird. Somit ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar für

$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{3, -3/2\}$$

Aufgabe 5

(a) Die Matrixgleichung ist äquivalent zu $DX = I$ mit

$$D = 2I-(A+B)^2+C^\top = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Das führt mit Gauß-Algorithmus angewandt auf $Y = [D|I]$ zu

$$\tilde{Y}_0 = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -3 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{Y}_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5/2 & 1 & -3/2 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{Y}_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{Y}_3 = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 6/5 & -4/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{Y}_4 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/10 & -1/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \end{array}\right)$$

Und damit ergibt sich als Lösung

$$X = \frac{1}{10}\left(\begin{array}{cc} 3 & -2 \\ 4 & -6 \end{array}\right).$$

(b) Die Matrixgleichung ist äquivalent zu $XA = A^\top - B$ bzw. zu $A^\top X^\top = (A - B^\top)$. Das ergibt mit Gauß-Algorithmus angewandt auf $Y = [A^\top | A - B^\top]$

$$Y = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{Y}_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{Y}_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{Y}_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{Y}_4 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

also (unter Beachtung, dass obiges LGS $X^\top$ liefert)

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$