

## Mathematik I (für IF, ET und Ph)

Wintersemester 2019/20

### 6. Übung: Determinanten und inverse Matrizen (Lösungen)

#### Aufgabe 1

*Wiederholung:* Nullraum, Bildraum.

Lösung:

- (a) Wir bestimmen den Nullraum über Lösen von  $Ax = \mathbf{0}$ . Durch den Gaußalgorithmus erhalten wir für die erweiterte Koeffizienten Matrix  $X = [A|\mathbf{0}]$

$$X = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \tilde{X}_1 = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \tilde{X}_2 = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Setzen wir  $x_3 = t$ , so erhalten wir als Lösungsvektor  $x = (-t, t, t)$ . Es gilt also  $N(A) = \text{span}\{(-1, 1, 1)^T\}$ .

- (b) Wir wenden wie oben den Gaußalgorithmus auf  $X = [A|b]$  an (es sind die selben Schritte) und erhalten:

$$\tilde{X}_2 = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

Damit ist das LGS nicht lösbar, d.h.  $b \notin R(A)$  und es existiert kein Vektor  $x \in \mathbb{R}^3$ , so dass  $f(x) = Ax = b$ .

- (c) allgemein:  $x$  beliebig,  $x_0 \in N(A)$ . Dann ist

$$A(x + x_0) = Ax + Ax_0 = Ax.$$

Ist also  $N(A)$  nichttrivial, so gibt es immer mehrere (unendlich viele) Vektoren, die das selbe Bild haben. Nach Teilaufgabe (a) folgt also: ja, es gibt verschiedene Vektoren mit dem gleichen Bild.

- (d) Nach Satz 3.16 der Vorlesung gilt  $\dim N(A) + \dim R(A) = n$ . Mit  $\dim N(A) = 1$  und  $n = 3$  gilt also  $\dim R(A) = 2$ .

#### Aufgabe 2

*Wiederholung:* Berechnung von Determinanten.

Lösung:

- (a) Die Regel für Determinanten von  $2 \times 2$ -Matrizen lautet:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Also gilt:

$$\det A = 0 \cdot (-5) - 11 \cdot 0 = 0$$

$$\det B = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$\det C = (2 + 3i) \cdot (1 + 2i) - 1 \cdot i = -4 + 6i$$

$$\det D = 2 \cdot 2 + i \cdot i = 3$$

$$\det E = 3i \cdot (-3i) + 4 \cdot 4 = 25$$

Für  $3 \times 3$ -Matrizen gilt die Regel von Sarrus.

$$\begin{aligned} \det F &= 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 1 \\ &= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det G &= 1 \cdot 3 \cdot (-5) + 1 \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot (-5) \\ &= -15 + 4 - 2 + 6 - 2 + 10 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det H &= (1-i) \cdot i \cdot (1+i) + 1 \cdot (-1+i) \cdot (1+i) - 1 \cdot (-1+i) \cdot (1+i) \\ &= (1-i^2)i = 2i \end{aligned}$$

$$\det J = \frac{1}{2^3} (1 \cdot 1 \cdot (-1+i) - i^2) = \frac{i}{8}$$

Für größere Matrizen kann der Entwicklungssatz angewendet werden:

$$\begin{aligned} \det K &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ -1 & 1 & \mathbf{0} & -1 \\ 1 & -1 & \mathbf{0} & 1 \\ 3 & 5 & \mathbf{4} & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

(b) Mit der Laplace-Entwicklung nach erster Spalte folgt

$$\det L = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 0 & a & 0 \\ \mathbf{0} & a & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & -a & -b \\ \mathbf{1} & b & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & -a & -b \\ b & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & -a & -b \end{vmatrix} = 2ab - a^2b = ab \cdot (2-a),$$

d.h., für  $a \in \{0, 2\}$  oder  $b = 0$  gilt  $\det L = 0$ .

(c) Die zweite Spalte von  $F$  ist das arithmetische Mittel der beiden anderen Spalten, kann also als Linearkombination dieser beiden Spalten geschrieben werden. Damit sind die Spalten von  $F$  linear abhängig, was gleichbedeutend ist mit  $\det F = 0$ .

(d) Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante nicht 0 ist. Also existieren zu  $A$  und  $F$  keine inversen Matrizen. Für  $2 \times 2$ -Matrizen kann man die folgende Formel benutzen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man also:

$$B^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus für  $Y = [G|I_3]$  erhält man

$$\begin{aligned} Y &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \tilde{Y}_1 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\Rightarrow \tilde{Y}_2 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 1 \end{array} \right) \\ &\Rightarrow \tilde{Y}_3 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -17 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

also

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} -17 & 8 & 5 \\ 7 & -3 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analog kann man auch die Matrix  $J$  mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus invertieren:

$$\begin{aligned} Y = [2J|I_3] &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & i-1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \tilde{Y}_1 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-2i & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & i & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\Rightarrow \tilde{Y}_2 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-2i & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -i \end{array} \right), \\ &\Rightarrow \tilde{Y}_3 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1+i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4-2i & 1 & -2+2i \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -i \end{array} \right), \end{aligned}$$

wobei wir  $-i \cdot (2 - 2i) = 2 - 2i$  verwendet haben. Damit folgt

$$J^{-1} = 2(2J)^{-1} = \begin{pmatrix} 2+2i & 0 & 2 \\ -8-4i & 2 & -4+4i \\ 2 & 0 & -2i \end{pmatrix}$$

- (e) Diagonalmatrizen sind spezielle Dreiecksmatrizen, für die gilt, das man die Determinante dadurch berechnen kann, indem man die Diagonalelemente miteinander multipliziert. Demnach gilt:

$$\det M_n = n(n-1) \cdots 1 = n!$$

auch die Inverse ergibt sich leicht zu:

$$M_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

- (f) Die Multiplikation mit  $N_n$  bewirkt, das die Einträge von  $x \in \mathbb{R}^n$  gespiegelt werden. Multipliziert man einen gespiegelten Vektor nochmal mit  $N_n$ , so werden die Einträge wieder zurückgespiegelt. Man erhält also bei der Multiplikation  $N_n^2 x$  wieder den Vektor  $x$ . Das bedeutet, dass  $N_n^2$  die Einheitsmatrix ist und somit

$$N_n^{-1} = N_n$$

gilt.