TU Chemnitz – Professur Analysis
Prof. Dr. Peter Stollmann
Dr. Martin Tautenhahn, Dipl.-Math. Clemens Bombach, Dipl.-Math. Christian Rebs

Mathematik I (für IF, ET und Ph)

Wintersemester 2019/20

6. Übung: Determinanten und inverse Matrizen

Aufgabe 1

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Welche Vektoren werden auf den Nullvektor abgebildet?

(b) Gibt es einen Vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$, dessen Bild $\boldsymbol{b} = (2, 2, 2)^\top$ ist?

(c) Gibt es zwei verschiedene Vektoren, die das gleiche Bild haben?

(d) Welche Dimension hat der Bildraum von f?

Aufgabe 2

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 3i & -4 \\ 4 & -3i \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1-i & -1+i & 0 \\ 1 & i & 1 \\ 1+i & 0 & 1+i \end{pmatrix},$$

$$J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 2 & 1 & 2 \\ -i & 0 & i-1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a & -b \\ 1 & b & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & n \end{pmatrix}, \quad N_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

(a) Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen $A, \cdots, K$.

(b) Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $\det L = 0$?

(c) Wie können Sie $\det F = 0$ begründen, ohne die Determinante auszurechnen?

(d) Berechnen Sie – falls möglich – die inversen Matrizen zu A, B, D, F, G und J.

(e) Wie lautet die Determinante und inverse Matrix von M_n?

(f) Was bewirkt die Matrix-Vektor Multiplikation $N_n \boldsymbol{x}$? Was bedeutet das für die Matrix-Vektor Multiplikation $N_n^2 \boldsymbol{x}$ und damit die Matrix N_n^2? Kann man damit eine inverse Matrix zu N_n angeben?