TU Chemnitz – Professur Analysis
Prof. Dr. Peter Stollmann
Dr. Martin Tautenhahn, Dipl.-Math. Clemens Bombach, Dipl.-Math. Christian Rebs

Mathematik I (für IF, ET und Ph)

Wintersemester 2019/20

7. Übung: Orthogonalität, Skalarprodukt, Norm und analytische Geometrie (Lösungen)

Widerholung: Skalarprodukt, Norm, Orthogonalität, Winkel

Lösung: **Aufgabe 1**

(a)

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{a}\| &= \sqrt{9+0+16} = 5 \\ \|\boldsymbol{b}\| &= \sqrt{49+0+1} = \sqrt{50} \\ \|\boldsymbol{c}\| &= \sqrt{16+16+4} = 6 \end{aligned}$$

(b) Wir orthonormieren mittels Gram-Schmidt-Verfahren und erhalten die neuen orthonormalen Vektoren $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3\}$ als

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_1 &= \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a} = \frac{1}{5}(3;0;4)^\top \\ \tilde{\boldsymbol{b}} &= \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{q}_1)\,\boldsymbol{q}_1 \\ &= (7,0,1)^\top - \frac{1}{5}(21+0+4)\,\frac{1}{5}(3,0,4)^\top = (4,0,-3)^\top \\ \boldsymbol{q}_2 &= \frac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{b}}\|}\tilde{\boldsymbol{b}} = \frac{1}{5}(4;0;-3)^\top \\ \tilde{\boldsymbol{c}} &= \boldsymbol{c} - (\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{q}_1)\,\boldsymbol{q}_1 - (\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{q}_2)\,\boldsymbol{q}_2 \\ &= (4,4,-2)^\top - \frac{1}{5}(12+0-8)\,\frac{1}{5}(3,0,4)^\top - \frac{1}{5}(16+0+6)\,\frac{1}{5}(4,0,-3)^\top \\ &= (4,4,-2)^\top - \frac{4}{25}(3,0,4)^\top - \frac{22}{25}(4,0,-3)^\top \\ &= (4,4,-2)^\top - \frac{1}{25}(100,0,-50)^\top = (0,4,0)^\top \\ \boldsymbol{q}_3 &= \frac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{c}}\|}\tilde{\boldsymbol{c}} = (0;1;0)^\top \end{aligned}$$

(c)

$$\cos(\alpha) = \frac{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} = \frac{21+20-2}{\sqrt{26}\sqrt{78}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Aufgabe 2

Widerholung: Kreuzprodukt

Lösung:

(a) Es gilt $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{e}_2$. Damit gilt laut Vorlesung

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3) = -(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1) = -\boldsymbol{e}_2 \\ (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) &= (-\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2) = -(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{e}_3 \\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} &= (-\boldsymbol{e}_2\times -\boldsymbol{e}_1) = -(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) &= (-\boldsymbol{e}_2) \cdot (-\boldsymbol{e}_3) = 0 \\
[(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}] \cdot \boldsymbol{d} &= (-\boldsymbol{e}_2) \cdot (-\boldsymbol{e}_3) = 0 \\
(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) &= (-\boldsymbol{e}_2) \times (-\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \\
[(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}] \times \boldsymbol{d} &= (-\boldsymbol{e}_3) \times (\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w} &= (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) \times \boldsymbol{z} + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) \times \boldsymbol{y} + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{x} \\
&= (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) + \underbrace{(\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{z})}_{=\boldsymbol{0}} + (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) + \underbrace{(\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{y})}_{=\boldsymbol{0}} + \underbrace{(\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{y})}_{=-(\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z})} + \underbrace{(\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{x})}_{=-(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})} - \underbrace{(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x})}_{=\boldsymbol{0}} \\
&= \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z}
\end{aligned}$$

(c) Die Norm des Kreuzproduktes entspricht der Fläche des Parallelogramms , das die beiden Vektoren aufspannen. Damit entspricht die Hälfte des Kreuzproduktes gerade der Fläche des Dreiecks, das die beiden Vektoren aufspannen. Man muss also nur noch zwei Vektoren berechnen (z.B. $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$) die das Dreieck ABC aufspannen:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= (-6; -3; 2)^\top \\
\overrightarrow{AC} &= (-3; 2; -6)^\top \\
\boldsymbol{x} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (14; -42; -21)^\top \\
\|\boldsymbol{x}\| &= \sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} = \sqrt{2401} = 49
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Fläche des Dreiecks ABC zu 24.5. des Dreiecks ABC mit $A(7; 3; 4), B(1; 0; 6)$ und $C(4; 5; -2)$.

Aufgabe 3

(a) Da die Vektoren $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; 1)^\top$ und $\overrightarrow{AC} = (4; 2; -3)^\top$ linear unabhängig sind, liegen die Punkte nicht auf einer Geraden. Alternativ kann man auch die Fläche des Dreiecks ABC (siehe vorhergehende Aufgabe) bestimmen. Ist dieser Flächeninhalt positiv, so liegen die drei Punkte nicht auf einer Geraden. Nur wenn der Flächeninhalt 0 ist, sind die Punkte kolinear.

(b) Man kann die Ebenengleichung von drei dieser Punkte aufstellen und prüfen, ob der vierte in dieser Ebene liegt. Ist das Volumen des von den Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ aufgespannten Parallelepipeds 0 so liegen die vier punkte in einer Ebene. Um das Volumen dieses Parallelepipeds zu bestimmen muss man nur das Spatprodukt bilden:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Also liegen die vier Punkte in einer Ebene.

Aufgabe 4

(a) $\overrightarrow{n}$ ist der Normalenvektor der Ebene und P_0 ein Punkt der Ebene:

$$\overrightarrow{n} \cdot (P_0 - \overrightarrow{x}) = 0 \Longleftrightarrow 2x - y + 3z = 10 - 3 - 6 = 1.$$

(b) Ebenen parallel zu E haben die Form $4x - 2y + 3z - d = 0$. Um d zu bestimmen muss man also nur noch P_0 einsetzen:

$$4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - d = 0 = 3 - d$$

Also ist die Gleichung der gesuchten Ebene gegeben durch $4x - 2y + 3z - 3 = 0$.

(c) Die Ebene wird durch die Vektoren P_0P_1 und P_0P_2 aufgespannt. Der Normalenvektor dieser Ebene ist (bis auf ein skalares Vielfaches) das Kreuzprodukt dieser beiden Vektoen:

$$P_0P_1 \times P_0P_2 = (-36; 27; -9)^\top$$

Ein Normalenvektor ist also z.B durch $\overrightarrow{n} = (4; -3; 1)^\top$ gegeben. Damit kann man also jetzt die Normalenform der Ebene angeben:

$$4x - 3y + z = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{n} P_0 = 17.$$

Man kann auch einen der anderen beiden Punkte zur Berechnung der Normalenform nutzen.

(d) Der Winkel zwischen zwei Ebenen entspricht dem Winkel zwischen deren Normalenvektoren

$$\begin{aligned} n_1 &= (1; -2; 2)^\top \\ n_2 &= (1; 0; 1)^\top \\ \cos(\alpha) &= \frac{n_1^\top n_2}{\|n_1\| \|n_2\|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(e) Der Normalenvektor der gesuchten Ebene steht senkrecht auf den Normalenvektoren der Ebenen E_1 und E_2, ist also das Kreuzprodukt dieser beiden Vektoren. Zusammen mit dem Punkt P_0 ergibt sich die Normalenform der gesuchten Ebene:

$$\begin{aligned} n_1 &= (2; 1; -3)^\top \\ n_2 &= (5; 5; -7)^\top \\ n &= n_1 \times n_2 = (8; -1; 5)^\top \\ &\Rightarrow 8x - y + 5z = 8 \cdot 2 - 1 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = 7 \end{aligned}$$

(f) Aufsatzpunkt: A oder B.
Richtung : $\overrightarrow{AB} = (3; 4; -5)^\top$.

(g) Gleichsetzen liefert Gleichungssystem für λ und μ:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eindeutige Lösung ist $\lambda = -\mu = 1/3$. Damit ergibt sich der Schnittpunkt $S = (1/3)(2; -1; -1)^\top$. Der Schnittwinkel ist der Winkel zwischen den Richtungsvektoren:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1 &= (1; -2; 1)^\top \\ \boldsymbol{r}_2 &= (2; -1; -1)^\top \\ \cos(\alpha) &= \frac{\boldsymbol{r}_1^\top \boldsymbol{r}_2}{\|\boldsymbol{r}_1\| \|\boldsymbol{r}_2\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

(h) Die Koordinaten eines Punktes auf der Geraden g sind $(2+2\lambda; -4+2\lambda; 1-\lambda)^\top$. Da der Schnittpunkt auch auf der Ebene liegt, muss also gelten:

$$\begin{aligned}(2+2\lambda) - (-4+2\lambda) + 3(1-\lambda) &= -2 \\ \Leftrightarrow 9 - 3\lambda &= -2 \\ \Leftrightarrow \lambda &= 11/3\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Geradengleichung ergibt das einen Schnittpunkt $S = (1/3)(28; 10; -8)^\top$.

(i) Da die Gerade die Z-Achse schneidet, gibt es also einen Punkt $S = (0; 0; z)$ auf der gesuchten Geraden. Damit ist der Richtungsvektor der Geraden durch $(1; -1; 1-z)^\top$ gegeben. Damit die Geraden die z-Achse senkrecht schneidet, muss dieser Richtungsvektor senkrecht auf $(0; 0; 1)^\top$ sein:

$$(1; -1; 1-z) \cdot (0; 0; 1)^\top = 1 - z = 0 \Rightarrow z = 1.$$

Damit ergibt sich die Geradengleichung also zu

$$x = (0; 0; 1)^\top + \lambda(1; -1; 0)^\top$$

(j) analog zu (h) ergibt sich $\lambda = 3$ und der Schnittpunkt $(5; 5; -2)^\top$

(k) Wir überprüfen:

- Sind die Richtungsvektoren linear abhängig? Hier $(1, -2, 1)^\top \neq \alpha(0, 1, -2)^\top$, also sind sie nicht parallel.
- Wir berechnen das Spatprodukt

$$\left[\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4-1\\2-1\\1-3\end{pmatrix}\right] = \begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\-2 & 1 & 1\\1 & -2 & -2\end{vmatrix} = -2 + 12 - 3 + 2 = 9 \neq 0$$

Damit sind die Geraden windschief (sonst wäre das Spatprodukt Null).

(l) Zur Abstandsbestimmung benötigen wir noch

$$\|(1, -2, 1) \times (0, 1, -2)\| = \|(4-1, 0-(-2), 1-0)\| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}.$$

Dann gilt mit der Formel aus der Vorlesung

$$d(g_1, g_2) = \frac{9}{\sqrt{14}}.$$