

Mathematik I (für IF, ET und Ph)

Wintersemester 2019/20

8. Übung: orthogonale Abbildungen und Eigenwerte (Lösungen)

Aufgabe 1

Wiederholung: Spiegelungen

Lösung:

- (a) Der Richtungsvektor einer Geraden mit Anstiegswinkel α ist $(\cos \alpha, \sin \alpha)^\top$, damit ist $\vec{n} = (-\sin \alpha, \cos \alpha)^\top$ ein Normalenvektor dieser Geraden. Mit der Formel aus der Vorlesung ergibt sich

$$S_{\vec{n}} = I - 2\vec{n}\vec{n}^\top = \begin{pmatrix} n_2^2 - n_1^2 & -2n_1n_2 \\ -2n_1n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

- (b) Für $\alpha = 60^\circ$ ergibt sich

$$S = \begin{pmatrix} \cos(120^\circ) & \sin(120^\circ) \\ \sin(120^\circ) & -\cos(120^\circ) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

und der Spiegelpunkt von $P = (1, -2)^\top$ ist

$$SP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2.2321 \\ -0.1340 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

- (a) Sind U und V orthogonale Matrizen, so gilt $U^{-1} = U^\top$ und $V^{-1} = V^\top$. Nun gilt für das Produkt $A = UV$

$$A^{-1} = (UV)^{-1} = V^{-1}U^{-1} = V^\top U^\top = (UV)^\top = A^\top.$$

Also ist A auch orthogonal. Alternativ kann man auch zeigen, dass A die Definition für orthogonale Matrizen aus der Vorlesung erfüllt bzw. orthonormale Spalten hat.

- (b) Sei $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir wissen $U^{-1} = U^\top$. Damit gilt für die Determinante

$$1 = \det(I) = \det(UU^{-1}) = \det(UU^\top) = \det(U) \cdot \det(U^\top) = \det(U)^2.$$

Folglich gilt $\det(U) = \pm 1$.

- (c) Damit A orthogonal ist, muss es normierte Zeilen und Spalten besitzen. Also muss gelten

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{3}{5}\right)^2 + x^2 = \frac{9}{25} + x^2 = \frac{9}{25} + y^2 \\ &\Rightarrow x^2 = y^2 = \frac{16}{25} \\ &\Rightarrow x, y \in \left\{\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}\right\} \end{aligned}$$

Damit A orthogonal ist, müssen die beiden Spalten senkrecht aufeinander stehen. Gilt $x = y$, so bedeutet das

$$\frac{3}{5}x + yz = x \left(\frac{3}{5} + z \right) = 0 \Rightarrow z = -\frac{3}{5}.$$

Gilt $x = -y$, so ergibt sich $z = 3/5$. Es ergeben sich also 4 orthogonale Matrizen

$$A_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Analog dazu ergeben sich vier mögliche Matrizen B

$$B_1 = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ -7 & 24 \end{pmatrix} \quad B_2 = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} \quad B_3 = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -24 & 7 \\ 7 & 24 \end{pmatrix} \quad B_4 = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -24 & 7 \\ -7 & -24 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

- (a) A ist eine obere Dreiecksmatrix, d.h., das charakteristische Polynom bzw. die Eigenwerte können einfach von der Hauptdiagonale abgelesen werden:

$$c_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = (\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda - 3) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 16\lambda - 12$$

bzw. $\lambda_1 = 2$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und $\lambda_2 = 3$ mit algebraischer Vielfachheit 1.

- (b) Wir betrachten die Gleichungssysteme zur Bestimmung der Eigenvektoren. Zunächst für $\lambda_2 = 3$:

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Wir erhalten als Lösungsmenge

$$L = \text{span}\{(\alpha - 1, 1, 1)^\top\}.$$

Insbesondere hat λ_2 also geometrische Vielfachheit 1.

Nun zu den Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 2$:

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Gilt nun $\alpha \neq 0$, so hat obiges System nur eine eindimensionale Lösungsmenge $L = \text{span}\{(1, 0, 0)^\top\}$. Ist aber $\alpha = 0$, dann ist die Lösungsmenge $L = \text{span}\{(1, 0, 0)^\top, (0, 1, 0)^\top\}$. Ergo ist die Matrix für $\alpha = 0$ diagonalisierbar mit den Eigenvektoren $(1, 0, 0)^\top$ und $(0, 1, 0)^\top$ zu $\lambda_1 = 2$ und $(-1, 1, 1)^\top$ zu $\lambda_2 = 3$.

Aufgabe 4

A und B besitzen beide das charakteristische Polynom

$$c_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = c_B(\lambda).$$

Damit haben beide die Eigenwerte $\lambda_1 = 1 + i$ und $\lambda_2 = 1 - i$. Allerdings unterscheiden sich die Eigenvektoren. Wir erhalten für A :

$$\begin{aligned}(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0} &\iff 1x_1 - ix_2 = 0 \\(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0} &\iff 1x_1 + ix_2 = 0\end{aligned}$$

also besitzt A z.B. die Eigenvektoren $\vec{x}_1^A = (i, 1)^\top$ und $\vec{x}_2^A = (i, -1)^\top$. Analog für B :

$$\begin{aligned}(B - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0} &\iff -ix_1 + 1x_2 = 0 \\(B - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0} &\iff ix_1 + 1x_2 = 0\end{aligned}$$

also $\vec{x}_1^B = (i, -1)^\top$ und $\vec{x}_2^B = (i, 1)^\top$.

Im Allgemeinen haben eine Matrix A und ihre transponierte Matrix $B = A^\top$ zwar die selben Eigenwerte, aber die Eigenvektoren unterscheiden sich (nur in diesem Beispiel haben sich die Eigenvektoren zufällig vertauscht).

Bzgl. der Ähnlichkeit gilt hier: da beide Matrizen die gleichen Eigenwerte haben und diagonalisierbar sind, sind sie auch ähnlich:

$$A = V^{-1}DV, B = U^{-1}DU \implies A = V^{-1}U B U^{-1}V = W^{-1}BW,$$

wobei $W = U^{-1}V$ wieder invertierbar ist.

Aufgabe 5

Die charakteristischen Polynome dritten Grades können über Raten bzw. Probieren einer guten Null-

stelle (3,2,1,0,-1,-2,-3) und anschließender Ausklammerung bzw. Polynomdivision gelöst werden.

$$A : \quad p(x) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

$$\lambda_1 = -2, \quad \vec{x}_1 = (1, -1)^\top \quad n_{\text{geom}} = n_{\text{alg}} = 1$$

$$\lambda_2 = 4, \quad \vec{x}_2 = (1, 1)^\top \quad n_{\text{geom}} = n_{\text{alg}} = 1$$

$$B : \quad p(x) = \det(\lambda I - B) = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 39\lambda - 28 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 11\lambda + 28)$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \vec{x}_1 = (-2, 2, 1)^\top \quad n_{\text{geom}} = n_{\text{alg}} = 1$$

$$\lambda_2 = 4, \quad \vec{x}_2 = (2, 1, 2)^\top \quad n_{\text{geom}} = n_{\text{alg}} = 1$$

$$\lambda_3 = 7, \quad \vec{x}_3 = (-1, -2, 2)^\top \quad n_{\text{geom}} = n_{\text{alg}} = 1$$

$$C : \quad p(x) = \det(\lambda I - C) = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda - 10 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 11\lambda + 10)$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \vec{x}_1 = (2, 0, 1)^\top \quad \vec{x}_2 = (-2, 1, 0)^\top \quad n_{\text{geom}} = n_{\text{alg}} = 2$$

$$\lambda_3 = 10, \quad \vec{x}_3 = (-1, -2, 2)^\top \quad n_{\text{geom}} = n_{\text{alg}} = 1$$

$$D : \quad p(x) = \det(\lambda I - D) = \lambda^3 - 5\lambda^2 = (\lambda - 0)^2(\lambda - 5)$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \vec{x}_1 = (5, 1, 7)^\top \quad n_{\text{geom}} = 1, n_{\text{alg}} = 2$$

$$\lambda_2 = 5, \quad \vec{x}_2 = (0, 1, 2)^\top \quad n_{\text{geom}} = n_{\text{alg}} = 1$$