

Gleichungen und Herleitungen zur Supersymmetrie

Wir geben hier die nötigen Definitionen und Rechenverfahren für allgemeine supersymmetrische Modelle an. Die in Abschnitt 4.5 angegebene Lagrangedichte kann direkt auf das MSSM oder die supersymmetrische QED oder QCD spezialisiert werden. Viele der folgenden Definitionen und Rechnungen finden sich auch in [12, 16, 5, 11] oder [10], allerdings in anderen Konventionen. Unsere Konventionen sind auf die Komponentenfelder aus [7] abgestimmt.

1 Lorentz- und Poincarégruppe und Spinoren

1.1 Poincaréalgebra

Die Lorentzgruppe ist die Gruppe aller Matrizen $\Lambda^\mu{}_\nu$ auf dem Minkowskiraum, die die Bilinearform $xy = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$ und damit die Lichtgeschwindigkeit invariant lassen. Dazu äquivalent ist

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma g^{\rho\sigma} = g^{\mu\nu}. \quad (1)$$

Der metrische Tensor $g^{\mu\nu}$ ist dabei

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (2)$$

Es ist $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$, und $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$ für einen 4-Vektor A^μ . Eine infinitesimale Lorentztransformation schreiben wir als

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad (3)$$

wobei die Bedingung (1) äquivalent zur Antisymmetrie $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ ist.

Sei nun $U(\Lambda)$ eine Darstellung der Lorentzgruppe. In dieser Darstellung schreiben wir eine infinitesimale Lorentztransformation als

$$U(\delta + \omega) = 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \quad (4)$$

mit antisymmetrischem $J^{\mu\nu}$. In der Fundamentaldarstellung ist also

$$(J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = i(g^{\mu\rho} g_\nu{}^\sigma - g^{\mu\sigma} g_\nu{}^\rho). \quad (5)$$

Die Poincarégruppe ist die Gruppe der Lorentztransformationen und Translationen auf dem Minkowskiraum. Bezeichnet (Λ, a) die Transformation $x \rightarrow \Lambda x + a$ und $U(\Lambda, a)$ eine Darstellung der Poincarégruppe, so schreiben wir für eine infinitesimale Transformation

$$U(\delta + \omega, \epsilon) = 1 + i\epsilon^\mu P_\mu - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}. \quad (6)$$

Aus diesen Definitionen folgt, daß P und J Tensoren unter Lorentztransformationen sind, daß also folgende Kovarianzeigenschaften gelten:

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda^\rho{}_\sigma U(\Lambda) P^\nu U(\Lambda)^{-1} = P^\mu, \quad (7)$$

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma U(\Lambda) J^{\rho\sigma} U(\Lambda)^{-1} = J^{\mu\nu}. \quad (8)$$

Die infinitesimale Versionen dieser Kovarianzbeziehung ist

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = (J^{\rho\sigma})^\mu{}_\lambda P^\lambda, \quad (9)$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = (J^{\rho\sigma})^\mu{}_\lambda J^{\lambda\nu} + (J^{\rho\sigma})^\nu{}_\lambda J^{\mu\lambda}. \quad (10)$$

Eine wichtige Darstellung der Poincarégruppe ist die mit Differentialoperatoren auf einem Funktionenraum auf dem Minkowskiraum. Diese Darstellung $U(\Lambda, a)$ ist definiert durch

$$(U(\Lambda, 0)f)(x) = f(\Lambda^{-1}x) \Rightarrow J^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} \equiv i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu), \quad (11)$$

$$(U(0, a)f)(x) = f(x - a) \Rightarrow P^\mu = i\partial^\mu. \quad (12)$$

Die Vorzeichen bei den Definitionen von $J^{\mu\nu}$ und P^μ wurden so gewählt, daß die Vorzeichen in dieser Darstellung den aus der Quantenmechanik üblichen entsprechen.

Sowohl aus der Differentialoperatordarstellung als auch aus den infinitesimalen Versionen der Kovarianzbeziehungen oben als auch aus der fundamentalen Darstellung der $J^{\mu\nu}$ folgen die Vertauschungsrelationen der Poincaréalgebra

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (13)$$

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho), \quad (14)$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho}). \quad (15)$$

1.2 2-Spinordarstellungen

Es ist nützlich, die Weyl-Darstellung von γ -Matrizen und den üblichen 4-Spinoren, die z.B. in der Dirac-Gleichung auftauchen, zu wählen. In dieser Darstellung zerfallen 4-Spinoren in zwei 2-Spinoren, sogenannte Weyl/van der Waerden-Spinoren mit "gepunkteten" oder "ungepunkteten" Indizes. Die γ -Matrizen und Kombinationen davon setzen sich aus 2×2 -Blockmatrizen zusammen. Wir beginnen mit einer systematischen Einführung der 2-Spinoren und zugehörigen σ -Matrizen (diese kann zunächst übersprungen werden), danach geben wir den Zusammenhang zu den üblichen 4-Spinoren und γ -Matrizen an.

Wir betrachten zunächst einen 2-Spinorraum, dessen Elemente wir mit ψ^α ($\alpha = 1, 2$) bezeichnen. Für jedes ψ^α können wir drei weitere 2-Spinoren durch Herunterziehen der Indizes und komplexe Konjugation wie folgt definieren:

$$\overline{\psi}^{\dot{\alpha}} := (\psi^\alpha)^\dagger, \quad \psi_\alpha := \epsilon_{\alpha\beta} \psi^\beta, \quad \overline{\psi}_{\dot{\alpha}} := \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \overline{\psi}^{\dot{\beta}} = (\psi_\alpha)^\dagger. \quad (16)$$

Hierbei nehmen die Indizes die Werte $\alpha = 1, 2, \dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$ etc an, und

$$\epsilon_{\alpha\dot{\beta}} = -\epsilon_{\dot{\beta}\alpha}, \quad \epsilon_{\alpha\dot{\beta}} = -\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}, \quad \epsilon^{\alpha\dot{\beta}} = \epsilon_{\beta\alpha}, \quad \epsilon^{\alpha\dot{\beta}} = \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}, \quad \epsilon_{12} = 1, \quad \epsilon_{\dot{1}\dot{2}} = 1. \quad (17)$$

Die vier Räume der ψ^α , $\bar{\psi}^\alpha$, ψ_α , $\bar{\psi}_\alpha$ betrachten wir als vier unterschiedliche Spinorräume, und wir werden auf jedem Raum eine unterschiedliche Darstellung der Lorentztransformationen definieren.

Wir beginnen mit den Paulimatrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

und definieren damit die 4-Vektoren von Matrizen

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu := (1, \sigma^k)_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad (19)$$

$$\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} := (1, -\sigma^k)^{\dot{\alpha}\alpha}. \quad (20)$$

Die Indizes nehmen die Werte $\alpha = 1, 2, \dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$ an. Die Indexstruktur kennzeichnet hierbei, mit welchen Spinoren die Matrizen multipliziert werden sollen.

Zunächst können wir damit Spinordarstellungen der Lorentzgruppe auf den Räumen der ψ_α und $\bar{\psi}^\alpha$ definieren. Sie sind durch die Generatoren $\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}$ und $\frac{1}{2}\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ gegeben, wobei

$$(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta := \frac{i}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta, \quad (21)$$

$$(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} := \frac{i}{2}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}. \quad (22)$$

Daß diese Generatoren die Algebra (15) erfüllen, läßt sich mit den leicht zu verifizierenden Gleichungen

$$(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta = 2\delta_\alpha{}^\beta g^{\mu\nu}, \quad (23)$$

$$(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = 2\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} g^{\mu\nu}. \quad (24)$$

beweisen. Endliche Lorentztransformationen von ψ_α sind dann im Einklang mit (6) durch

$$M(\Lambda)_\alpha{}^\beta := \left(e^{-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}} \right)_\alpha{}^\beta \quad (25)$$

definiert. $M \in SL(2, \mathbb{C})$, weil $\text{Tr}(\sigma^{\mu\nu}) = 0$, also $\det M = 1$. Endliche Lorentztransformationen von $\bar{\psi}^\alpha$ sind analog durch $\left(e^{-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\frac{\bar{\sigma}^{\mu\nu}}{2}} \right)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}$ definiert, aber weil $\sigma^{\mu\dot{\nu}} = \bar{\sigma}^{\mu\nu}$ ist, ist dies nichts anderes als

$$M^{-1\dagger}(\Lambda)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = \left(e^{-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\frac{\bar{\sigma}^{\mu\nu}}{2}} \right)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}. \quad (26)$$

Die Darstellung der Lorentzgruppe auf den beiden anderen, den $\psi^{\alpha-}$ - und $\bar{\psi}_\alpha$ -Räumen ist durch $e^{\omega\beta} M_\beta{}^{\gamma\epsilon\delta} = (M^{-1})_\delta{}^\alpha$ und $\epsilon_{\alpha\dot{\beta}} M^{-1\dot{\beta}}{}_{\dot{\gamma}} \epsilon^{\dot{\gamma}\delta} = (M^\dagger)^\delta{}_{\dot{\alpha}}$ gegeben. Diese Gleichungen folgen daraus, daß $\det M = 1$ ist. Aus demselben Grund sind die ϵ -Tensoren numerisch invariant:

$$M_\alpha{}^\beta M_\gamma{}^\delta \epsilon_{\beta\delta} = \epsilon_{\alpha\gamma}. \quad (27)$$

Insgesamt transformieren die Spinoren unter der Lorentztransformation Λ wie folgt:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &\rightarrow (M)_\alpha{}^\beta \psi_\beta, \\ \bar{\psi}^\alpha &\rightarrow (M^{-1\dagger})^\alpha{}_{\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}}, \\ \psi^\alpha &\rightarrow \psi^{\dot{\beta}} (M^{-1})_\beta{}^\alpha, \\ \bar{\psi}_\alpha &\rightarrow \bar{\psi}_{\dot{\beta}} (M^\dagger)^{\dot{\beta}}{}_\alpha. \end{aligned}$$

Und daher sind die folgenden Skalarprodukte lorentzinvariant:

$$\psi\chi := \psi^\alpha \chi_\alpha = -\chi_\alpha \psi^\alpha = \chi^\alpha \psi_\alpha = \chi\psi, \quad (28)$$

$$\bar{\psi}\bar{\chi} := \bar{\psi}_\alpha \bar{\chi}^\alpha = -\bar{\chi}^\alpha \bar{\psi}_\alpha = \bar{\chi}_\alpha \bar{\psi}^\alpha = \bar{\chi}\bar{\psi}. \quad (29)$$

Wir definieren hier wie überall Produkte von Spinoren antikommutierend.

Wichtige Formeln, die sich für die hier definierten Matrizen ergeben, sind:

$$(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta = 2\delta_\alpha{}^\beta g^{\mu\nu}, \quad (30)$$

$$(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = 2\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} g^{\mu\nu}, \quad (31)$$

$$\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\sigma}^\rho + \bar{\sigma}^\rho\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu = 2(g^{\mu\nu}\bar{\sigma}^\rho - g^{\mu\rho}\bar{\sigma}^\nu + g^{\nu\rho}\bar{\sigma}^\mu), \quad (32)$$

$$\text{Tr}\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu = 2g^{\mu\nu}, \quad (33)$$

$$\text{Tr}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\sigma}^\rho\sigma^\sigma = 2(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}), \quad (34)$$

$$\text{Tr}\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\sigma^\rho\bar{\sigma}^\sigma = 2(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} + i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}), \quad (35)$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\dot{\gamma}\delta}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu = \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \quad (\Leftrightarrow \epsilon_{12} = \epsilon_{\dot{1}\dot{2}}), \quad (36)$$

$$(\psi\sigma^\mu)_\alpha = -\epsilon_{\alpha\dot{\beta}}{}^\beta(\bar{\sigma}^\mu\psi)_{\dot{\beta}}, \quad (37)$$

$$_\alpha(\sigma^\mu\bar{\psi}) = -\epsilon_{\alpha\beta}(\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu)^\beta, \quad (38)$$

$$_\alpha(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\psi) = \epsilon_{\alpha\beta}(\psi\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)^\beta \quad (39)$$

mit dem antisymmetrischen Tensor in vier Dimensionen

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ gerade Permutation von } (1, 2, 3, 4), \\ -1 & \text{falls } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ ungerade Permutation von } (1, 2, 3, 4), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (40)$$

Aus der Gleichung (32) folgt auch das Transformationsverhalten der σ -Matrizen:

$$\Lambda^\mu{}_\nu M_\alpha{}^\beta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu (M^\dagger)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\gamma}} = \sigma_{\alpha\dot{\gamma}}^\mu \quad (41)$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu (M^{-1\dagger})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\beta} (M^{-1})_\beta{}^\gamma = \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\gamma}. \quad (42)$$

Und daraus folgt die Kovarianz von $\psi\sigma^\mu\bar{\chi}$:

$$\psi'\sigma^\mu\bar{\chi}' = \Lambda^\mu{}_\nu\psi\sigma^\nu\bar{\chi} \quad (43)$$

und entsprechend für $\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\chi$.

1.3 4-Spinordarstellung

Nun können wir den Zusammenhang zu den üblichen 4-Spinoren angeben. 4-Spinoren setzen sich aus zwei zueinander ladungskonjugierten 2-Spinoren ψ_α , χ_α zusammen:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (44)$$

Wir stellen die γ -Matrizen dar als

$$\gamma^\mu := \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

$$\gamma^5 := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$P_L := \frac{1-\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (47)$$

$$P_R := \frac{1+\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Die so definierten γ -Matrizen erfüllen die Clifford-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (49)$$

und

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0. \quad (50)$$

Auf dem Raum der 4-Spinoren ist die Darstellung der Lorentzgruppe durch die Generatoren

$$S^{\mu\nu} := \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}, \quad (51)$$

$$\sigma^{\mu\nu} := \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (52)$$

definiert.¹ Daß die $S^{\mu\nu}$ die Algebra (15) erfüllen, folgt allein aus der Clifford-Algebra. Wegen $P_L\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ und $P_R\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$ nennen wir ψ einen linkschändigen und $\bar{\chi}$ einen rechtschändigen 2-Spinor.

¹Die Unterscheidung im Druck zwischen den Matrizen $\sigma^{\mu\nu}$ im 4-Spinorraum und $\sigma^{\mu\nu}$ im 2-Spinorraum halten wir nur in diesem Abschnitt aufrecht. Ansonsten geht aus dem Zusammenhang und der Indizierung immer hervor, welche von beiden gemeint ist.

Adjungierte und ladungskonjugierte 4-Spinoren werden wie üblich definiert:

$$\bar{\Psi} := \Psi^\dagger\gamma^0, \quad \Psi^C := i\gamma^0\gamma^2\bar{\Psi}^T. \quad (53)$$

Daraus ergeben sich die folgenden übersichtlichen Relationen zwischen 4- und 2-Spinoren:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = (\chi^\alpha \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}), \quad (54a)$$

$$\Psi^C = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ -\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}^C = (\psi^\alpha \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}). \quad (54b)$$

Majoranaspinoren erfüllen die Einschränkung $\Psi^C = \Psi$, also $\chi_\alpha = \psi_\alpha$. Spinoren mit $\Psi \neq \Psi^C$ nennen wir Diracs spinoren.

Wichtige Formeln, die sich leicht mit 2-Spinoren verstehen lassen, sind (sogenannte Flip-Regeln, siehe dazu auch [2]):

$$\bar{\Psi}_1 P_L \Psi_2 = \bar{\Psi}_2^C P_L \Psi_1^C = \chi_1 \psi_2, \quad (55)$$

$$\bar{\Psi}_1 P_R \Psi_2 = \bar{\Psi}_2^C P_R \Psi_1^C = \bar{\psi}_1 \bar{\chi}_2, \quad (56)$$

$$\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu P_L \Psi_2 = \bar{\Psi}_2^C (-\gamma^\mu P_R) \Psi_1^C = \bar{\psi}_1 \bar{\sigma}^\mu \psi_2 = -\psi_2 \sigma^\mu \bar{\psi}_1, \quad (57)$$

$$\bar{\Psi}_1 \{1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5\} \Psi_2 = \bar{\Psi}_2^C \{1, \gamma^5, -\gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5\} \Psi_1^C. \quad (58)$$

Hermiteische Konjugation verhält sich wie folgt:

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = (\psi^\alpha)^\dagger, \quad \bar{\psi}_\alpha = (\psi_\alpha)^\dagger, \quad (\psi_1 \psi_2)^\dagger = \bar{\psi}_2 \bar{\psi}_1, \quad (\psi_1 \sigma^\mu \bar{\psi}_2)^\dagger = \bar{\psi}_2 \sigma^\mu \bar{\psi}_1. \quad (59)$$

Damit gelten folgende Gleichungen:

$$(\bar{\Psi}_1 P_L \Psi_2)^\dagger = \bar{\Psi}_2 P_R \Psi_1, \quad (60)$$

$$(\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu P_L \Psi_2)^\dagger = \bar{\Psi}_2 \gamma^\mu P_R \Psi_1, \quad (61)$$

$$(\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu P_R \Psi_2)^\dagger = \bar{\Psi}_2 \gamma^\mu P_L \Psi_1, \quad (62)$$

$$(\bar{\Psi}_1 \{1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5\} \Psi_2)^\dagger = \bar{\Psi}_2 \{1, -\gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5\} \Psi_1. \quad (63)$$

Wichtige Formeln mit den γ -Matrizen sind:

$$\begin{aligned} \gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ &= -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma, \end{aligned} \quad (64)$$

$$(\gamma^5)^2 = 1, \quad (65)$$

$$\gamma^\mu P_L = P_R \gamma^\mu, \quad (66)$$

$$\gamma^\mu P_R = P_L \gamma^\mu, \quad (67)$$

$$\gamma^5 \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \sigma_{\rho\sigma}. \quad (68)$$

Die nächsten Formeln beruhen nur auf der Clifford-Algebra (49), allerdings verallgemeinert auf eine D -dimensionale Raumzeit mit $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = D$. Daß diese beiden Gleichungen für beliebige D erfüllbar sind, zeigt die explizit in [1] konstruierte Darstellung. Es gilt:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = D, \quad (69)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = (2 - D)\gamma^\nu, \quad (70)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} - (4 - D)\gamma^\nu \gamma^\rho, \quad (71)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu + (4 - D)\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma, \quad (72)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} \text{Tr } 1, \quad (73)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = (g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \text{Tr } 1, \quad (74)$$

$$\text{Tr (ungerade Anzahl v. } \gamma^{\mu_i}) = 0. \quad (75)$$

2 Supersymmetrie und Superraum

2.1 Supersymmetriealgebra

Die Supersymmetriealgebra ist eine nichtvertauschende Erweiterung der Poincaréalgebra, die von den Generatoren P^μ , $J^{\mu\nu}$, Q_α und $\bar{Q}_\alpha$ erzeugt wird. Die Vertauschungsrelationen sind:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (76)$$

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho), \quad (77)$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\rho\nu} - g^{\mu\nu}J^{\rho\sigma}), \quad (78)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 0, \quad (79)$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 2\sigma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu, \quad (80)$$

$$[P^\mu, Q_\alpha] = [P^\mu, \bar{Q}_\alpha] = 0, \quad (81)$$

$$[J^{\mu\nu}, Q_\alpha] = -\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}_\alpha(\sigma^{\mu\nu}Q). \quad (82)$$

Dabei ist die Vertauschungsrelation zwischen Q_α und $J^{\mu\nu}$ äquivalent dazu, daß Q_α ein Spinoroperator ist:

$$M(\Lambda)_\alpha{}^\beta U(\Lambda)Q_\beta U(\Lambda)^{-1} = Q_\alpha. \quad (83)$$

2.2 Superraum und Differentialoperatordarstellung

Die eigentliche Supersymmetriegruppe wird von den Generatoren Q_α , $\bar{Q}_\alpha$ und P^μ erzeugt. Ihre Elemente hängen von zwei mal zwei antikommutierenden Parametern ξ^α , $\bar{\xi}^\alpha$ und vier kommutierenden Parametern a_μ ab und sind durch

$$G(a, \xi, \bar{\xi}) := e^{i(aP + \xi Q + \bar{\xi} \bar{Q})} \quad (84)$$

definiert. Der Parameterraum dieser Gruppe ist das Produkt des Minkowskiraumes und zweier Spinorräume, der Superraum. Die Elemente des Superraums sind die Tupel $z = (x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}^\alpha)$.

Der Superraum ist der natürliche Darstellungsraum der Supersymmetriealgebra, genauso wie der Minkowskiraum für Poincarétransformationen. Die Lorentztransformationen sind auf dem Superraum durch den Vektor- bzw. Spinorcharakter von $x, \theta, \bar{\theta}$ bereits definiert. Die eigentliche Supersymmetrietransformation ist:

$$(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}^\alpha) \rightarrow (x^\mu + i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} + i\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\theta, \theta_\alpha + \xi_\alpha, \bar{\theta}^\alpha + \bar{\xi}^\alpha). \quad (85)$$

Sehr nützlich ist es, genau wie für die Poincaréalgebra auch für die Supersymmetriealgebra eine Darstellung durch Differentialoperatoren zu ermitteln. Dies ist, wieder analog zum Minkowskiraum, auf dem Superraum nun möglich. Zunächst definieren wir Ableitungen nach θ auf dem Superraum²

$$\partial^\alpha \theta_\beta := \delta^\alpha_\beta, \quad \partial_\alpha \theta^\alpha := \delta_\alpha^\beta, \quad (86)$$

$$\bar{\partial}_\alpha \bar{\theta}^\beta := \delta_\alpha^\beta, \quad \bar{\partial}^\alpha \bar{\theta}_\beta := \delta^\alpha_\beta. \quad (87)$$

$$\xi \partial \theta^\alpha = \xi^\alpha, \quad \bar{\xi} \bar{\partial} \bar{\theta}_\alpha = \bar{\xi}_\alpha, \quad (88)$$

wobei die Ableitungen mit Spinoren antikommutieren. Die eigentlichen Differentialoperatoren, die die Darstellung der Supersymmetriealgebra bilden, sind wie folgt definiert:

$$P^\mu = i\partial^\mu, \quad (89)$$

$$Q_\alpha = i(\partial_\alpha + i_\alpha(\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu), \quad (90)$$

$$\bar{Q}_\alpha = i(-\bar{\partial}_\alpha - i(\bar{\theta}\sigma^\mu)_\alpha\partial_\mu). \quad (91)$$

Diese Generatoren erfüllen

$$e^{i(aP + \xi Q + \bar{\xi} \bar{Q})} F(x, \theta, \bar{\theta}) = F(x - a - i\xi\sigma\bar{\theta} - i\bar{\xi}\bar{\sigma}\theta, \theta - \xi, \bar{\theta} - \bar{\xi}) \quad (92)$$

für Funktionen $F(x, \theta, \bar{\theta})$ auf dem Superraum.

2.3 Kovariante Ableitungen und Integrale

Es ist günstig, supersymmetriekovariante Ableitungen zu ermitteln. Zum einen ist nach der Algebra die Ortsableitung ∂_μ kovariant: $[\partial_\mu, Q_\alpha] = 0$. Es gibt zum anderen auch kovariante Ergänzungen der ∂_α :

$$D_\alpha := \partial_\alpha - i_\alpha(\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu, \quad (93)$$

$$\bar{D}_\alpha := -\bar{\partial}_\alpha + i(\bar{\theta}\sigma^\mu)_\alpha\partial_\mu, \quad (94)$$

$$D^\alpha := \epsilon^{\alpha\beta}D_\beta = -\partial^\alpha + i(\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu)^\alpha\partial_\mu, \quad (95)$$

$$\bar{D}^\alpha := \epsilon^{\alpha\beta}\bar{D}_\beta = \bar{\partial}^\alpha - i^\alpha(\bar{\theta}\sigma^\mu)\partial_\mu. \quad (96)$$

²Diese Konvention hat allerdings die Folge, daß $\partial_\alpha = -\epsilon_{\alpha\beta}\bar{\partial}^\beta$ und $\bar{\partial}_\alpha = -\epsilon_{\alpha\beta}\bar{\partial}^\beta$ ist. Eine natürliche Definition gibt es durch Gl. (88) nur für ∂_α und $\bar{\partial}^\alpha$.

Diese Ableitungen erfüllen

$$\{D_\alpha, Q_\alpha\} = \{D_\alpha, \overline{Q}_\alpha\} = \{D_\alpha, D_\beta\} = \{\overline{D}_\alpha, \overline{D}_\beta\} = 0, \quad (97)$$

$$\{D_\alpha, \overline{D}_\alpha\} = \{Q_\alpha, \overline{Q}_\alpha\} = 2i\sigma_\alpha^\mu \partial_\mu. \quad (98)$$

Nun definieren wir Integrale auf dem Superraum.

$$\int d\theta_\alpha \, 1 := 0, \quad \int d\overline{\theta}^\alpha \, 1 := 0, \quad (99)$$

$$\int d\theta_\alpha \, \theta^\beta := \delta_\alpha^\beta, \quad \int d\overline{\theta}^\alpha \, \overline{\theta}_\beta := \delta^\alpha_\beta, \quad (100)$$

$$\int d\theta_\alpha \, \theta^\beta \theta^\gamma := \delta_\alpha^\beta \theta^\gamma - \theta^\beta \delta_\alpha^\gamma, \quad \int d\overline{\theta}^\alpha \, \overline{\theta}_\beta \overline{\theta}_\gamma := \delta^\alpha_\beta \overline{\theta}_\gamma - \overline{\theta}_\beta \delta^\alpha_\gamma, \quad (101)$$

$$\int d\theta_\alpha \, \overline{\theta}_\beta := -\overline{\theta}_\beta \int d\theta_\alpha, \quad \int d\overline{\theta}^\alpha \, \theta^\beta := -\theta^\beta \int d\overline{\theta}^\alpha, \quad (102)$$

$$\int d^2\theta := \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta} \int d\theta_\alpha d\theta_\beta, \quad \int d^2\overline{\theta} := \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta} \int d\overline{\theta}^\alpha d\overline{\theta}^\beta. \quad (103)$$

Damit ergeben sich die wichtigen Gleichungen

$$\int d^2\theta \, \theta\theta = \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta}(\delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\delta - \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\delta) = 1, \quad (104)$$

$$\int d^2\overline{\theta} \, \overline{\theta}\overline{\theta} = 1. \quad (105)$$

Diese Integrale sind damit für beliebige Integranden definiert, denn wegen der Antikommutativität gibt es nur Polynome 2. Grades in θ_1, θ_2 oder $\overline{\theta}^1, \overline{\theta}^2$. Somit verschwinden Integrale über totale θ -Ableitungen:

$$\int d^2\theta \partial_\alpha f(\theta) = \int d^2\overline{\theta} \overline{\partial}^\alpha f(\overline{\theta}) = 0. \quad (106)$$

Deltafunktionen lassen sich durch $\delta^2(\theta) := \theta\theta$ und $\delta^2(\overline{\theta}) := \overline{\theta}\overline{\theta}$ definieren. Sie erfüllen:

$$\int d^2\theta \delta^2(\theta)(a + b^\alpha \theta_\alpha + c\theta\theta) = a, \quad (107)$$

$$\int d^2\overline{\theta} \delta^2(\overline{\theta})(a + b_\alpha \overline{\theta}^\alpha + c\overline{\theta}\overline{\theta}) = a. \quad (108)$$

Verschwenden Integrale von totalen Raumableitungen über den ganzen Minkowski-raum, so lassen sich die θ -Integrale durch kovariante Ableitungen ersetzen. Es ist nämlich

$$\frac{D^\alpha D_\alpha}{-4} \theta\theta = \frac{\overline{D}_\alpha \overline{D}^\alpha}{-4} \overline{\theta}\overline{\theta} = 1. \quad (109)$$

Deshalb ist

$$\int d^4x \int d^2\theta \, F(x, \theta, \overline{\theta}) = \int d^4x \frac{D^\alpha D_\alpha}{-4} F(x, \theta, \overline{\theta}) \quad (110)$$

und genauso

$$\int d^4x \int d^2\overline{\theta} \, F(x, \theta, \overline{\theta}) = \int d^4x \frac{\overline{D}_\alpha \overline{D}^\alpha}{-4} F(x, \theta, \overline{\theta}). \quad (111)$$

Zuletzt definieren wir noch das Integral

$$\int d^4\theta := \int d^2\theta d^2\overline{\theta}. \quad (112)$$

Damit sind die Integrale ein Mittel, um aus Polynomen in den θ und $\overline{\theta}$ gewisse Komponenten herauszuprojizieren. $\int d^4\theta$ ergibt die $\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}$ -Komponente, $\int d^4\theta \delta^2(\overline{\theta})$ die $\theta\theta$ -Komponente, $\int d^4\theta \delta^2(\theta)$ die $\overline{\theta}\overline{\theta}$ -Komponente und $\int d^4\theta \delta^2(\theta) \delta^2(\overline{\theta})$ die 1-Komponente.

2.4 Formelsammlung

Weitere wichtige Formeln mit den θ -Variablen sind:

$$\theta^\alpha \theta_\beta = \frac{1}{2} \delta^\alpha_\beta \theta\theta, \quad (113)$$

$$\overline{\theta}_\alpha \overline{\theta}^\beta = \frac{1}{2} \delta_\alpha^\beta \overline{\theta}\overline{\theta}, \quad (114)$$

$$\partial_\alpha \theta\theta = 2\theta_\alpha, \quad (115)$$

$$\overline{\partial}^\alpha \overline{\theta}\overline{\theta} = 2\overline{\theta}^\alpha, \quad (116)$$

$$\theta\sigma^\mu \overline{\psi} = -\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu \theta, \quad (117)$$

$$\psi_\mu \theta_\alpha = -\frac{1}{2} \theta\theta \psi_\alpha, \quad (118)$$

$$\overline{\psi}_\mu \overline{\theta}^\alpha = -\frac{1}{2} \overline{\theta}\overline{\theta} \overline{\psi}^\alpha, \quad (119)$$

$$\theta\sigma^\mu \overline{\chi} \theta_\psi = -\overline{\chi}\overline{\sigma}^\mu \theta \theta_\psi = -\frac{1}{2} \theta\theta \overline{\chi}\overline{\sigma}^\mu \psi = -\frac{1}{2} \theta\theta \psi\sigma^\mu \overline{\chi}, \quad (120)$$

$$\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu \chi \overline{\theta}_\psi = -\chi\sigma^\mu \overline{\theta} \overline{\theta}_\psi = -\frac{1}{2} \overline{\theta}\overline{\theta} \chi\sigma^\mu \overline{\psi} = -\frac{1}{2} \overline{\theta}\overline{\theta} \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu \chi, \quad (121)$$

$$\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu \sigma^\nu \overline{\theta} = \overline{\theta}\overline{g}^{\mu\nu}, \quad (122)$$

$$\theta\sigma^\mu \overline{\theta} \theta\sigma^\nu \overline{\theta} = -\theta\sigma^\mu \overline{\theta} \overline{\theta}\overline{\sigma}^\nu \theta = \frac{1}{2} \theta\theta \overline{\theta}\overline{\theta} g^{\mu\nu}, \quad (123)$$

$$\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu \sigma^\nu \overline{\theta}\overline{\sigma}^\rho \sigma^\sigma \overline{\theta} = \frac{1}{2} \overline{\theta}\overline{\theta} \Gamma_\nu \overline{\sigma}^\mu \sigma^\nu \overline{\theta}\overline{\sigma}^\rho \sigma^\sigma, \quad (124)$$

$$\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu \sigma^\nu \overline{\theta}\overline{\sigma}^\rho \theta = -\theta\sigma^\rho \overline{\theta}^\nu \sigma^\mu \overline{\theta}. \quad (125)$$

3 Superfelder

Superfelder sind Funktionen auf dem Superraum, die in den θ -Variablen analytisch sind [9, 6]. Die Taylorentwicklung in den θ bricht wegen der Antikommutativität ab und die Entwicklungskoeffizienten sind Funktionen auf dem Minkowskiraum, die Komponentenfelder. Wir betrachten skalare Superfelder, deren Supersymmetrietransformationen durch

$$F'(x', \theta', \bar{\theta}') := F(x, \theta, \bar{\theta}), \quad F' = e^{i(\alpha P + \xi Q + \bar{\xi} \bar{Q})} F \quad (126)$$

mit den Differentialoperatoren (89) definiert sind. Durch verschiedene weitere Einschränkungen an die Superfelder erhalten wir möglichst kleine Supersymmetriemultipletts.

3.1 Chirale Superfelder

Skalare Superfelder, die der Einschränkung

$$\bar{D}_\alpha \Phi = 0 \quad (127)$$

genügen, heißen chiral. Wir werden zeigen, daß chirale Superfelder als fermionischen Freiheitsgrad einen linkshändigen Spinor enthalten. Wegen $\{\bar{D}_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{D}_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 0$ ist diese Einschränkung kovariant unter Supersymmetrie. Die allgemeine Lösung zu dieser Gleichung finden wir in der chiralen Basis $(y, \theta_1, \bar{\theta}_1)$ mit

$$x'' = y'' + i\theta_1 \sigma^\mu \bar{\theta}_1, \quad \theta = \theta_1, \quad \bar{\theta} = \bar{\theta}_1. \quad (128)$$

In dieser Basis ist (Konvention $\bar{\partial}_\alpha \bar{\theta}^\beta = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha} \bar{\theta}^\beta := \delta_\alpha^\beta$)

$$\begin{aligned} -\bar{\partial}_\alpha^1 &= -\bar{\partial}_\alpha + i(\theta_1 \sigma^\mu)_{\dot{\beta}} (\bar{\partial}_\alpha^1 \bar{\theta}^{\dot{\beta}}) \partial_\mu \\ &= -\bar{\partial}_\alpha + i(\theta \sigma^\mu)_\alpha \partial_\mu \\ &= \bar{D}_\alpha. \end{aligned} \quad (129)$$

Entsprechend folgt

$$D_\alpha = \partial_\alpha^1 - 2i_\alpha (\sigma^\mu \bar{\theta}_1) \partial_\mu^1 \quad (130)$$

Also hat ein allgemeines chirales Superfeld die Form

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \phi(y, \theta) = e^{-i\theta \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu} \phi(x, \theta), \quad (131)$$

in Komponenten:

$$\begin{aligned} \phi(y, \theta) &= A(y) + \sqrt{2} \theta \psi(y) + \theta \theta F(y), \\ \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= A(x) + \sqrt{2} \theta \psi(x) + \theta \theta F(x) \\ &\quad - i\theta \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu A(x) - \frac{1}{4} \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \partial^\mu \partial_\mu A(x) \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2}} \theta \theta \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi(x). \end{aligned} \quad (132) \quad (133)$$

Die Felder A, ψ, F bilden ein chirales Multiplett. A und F sind komplexe Skalarfelder und ψ ist ein linkshändiger 2-Spinor.

3.2 Antichirale Superfelder

Antichirale Superfelder $\bar{\Phi}$ sind durch die Einschränkung

$$D_\alpha \bar{\Phi} = 0 \quad (134)$$

definiert. $\bar{\Phi} \equiv \Phi^\dagger$ ist genau dann antichiral, wenn Φ chiral ist. Die Komponentenzerglegung eines allgemeinen antichiralen Superfeldes ist daher:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) &= A^\dagger(x) + \sqrt{2} \bar{\theta} \bar{\psi}(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} F^\dagger(x) \\ &\quad + i\theta \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu A^\dagger(x) - \frac{1}{4} \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \partial^\mu \partial_\mu A^\dagger(x) \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2}} \theta \theta \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}(x) \end{aligned} \quad (135)$$

Die Felder $A^\dagger, \bar{\psi}, F^\dagger$ bilden das antichirale Multiplett. $A^\dagger$ und $F^\dagger$ sind komplexe Skalarfelder und $\bar{\psi}$ ist ein rechtshändiger 2-Spinor.

3.3 Vektorsuperfelder

Vektorsuperfelder sind reelle skalare Superfelder:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (136)$$

Sie enthalten gewöhnliche Vektorfelder. Unsere späteren supersymmetrischen Modelle sind eichinvariant unter

$$V \rightarrow V' := V + i(\Lambda - \bar{\Lambda}), \quad (137)$$

wobei Λ ein chirales Superfeld ist. Da die $1, \theta, \theta\theta$ -Komponenten von Λ wegen (133) unabhängig voneinander wählbar sind, können wir als Eichbedingung die Wess-Zumino-Eichung wählen, in der die $1, \theta, \theta\theta$ - und wegen der Realität von V auch die $\bar{\theta}, \bar{\theta}\bar{\theta}$ -Komponenten von V verschwinden. Die Komponentenzerglegung in dieser Eichung ist dann:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = \theta \sigma^\mu \bar{\theta} v_\mu + i\theta \bar{\theta} \bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta} \theta \lambda(x) + \frac{1}{2} \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} D(x) \quad (138)$$

Die Wess-Zumino-Bedingung legt die Eichung nicht vollständig fest. Die $1, \theta, \theta\theta$ -Komponenten bleiben genau dann unverändert, wenn wir

$$\Lambda := A - i\theta \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu A - \frac{1}{4} \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \square A$$

wählen, wobei $A - A^\dagger = 0$ ist, so daß

$$\Lambda - \bar{\Lambda} = -i\theta\sigma^{\mu\bar{\nu}}\bar{\partial}_\mu (A + A^\dagger).$$

Das heißt, die Wess-Zumino-Bedingung legt die Eichung fest bis auf die übliche Invarianz unter $v_\mu \rightarrow v_\mu + \partial_\mu \alpha$ mit reellem α . Das Vektormultipllett besteht aus den Komponenten von V . Die einzigen Komponenten, die sich nicht wegeichen lassen, sind das reelle Vektorfeld v_μ , das reelle Skalarfeld D und die links- und rechtshändigen Spinoren $\lambda, \bar{\lambda}$.

4 Supersymmetrische Wechselwirkungen

Wir berechnen nun einige wichtige Wechselwirkungsterme in Komponenten. Das Modell enthalte ein Materiemultipllett aus chiralen Superfeldern Φ und ein Vektormultipllett $V = T^a V^a$ mit den Generatoren T^a einer einfachen Eichgruppe. Wir fordern Invarianz unter der Eichtransformation:

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow e^{-i2g\Lambda} \Phi, \\ \bar{\Phi} &\rightarrow \bar{\Phi} e^{i2g\bar{\Lambda}}, \\ e^{2gV} &\rightarrow e^{-i2g\Lambda} e^{2gV} e^{2g\Lambda}, \end{aligned} \quad (139)$$

wobei $\Lambda = \Lambda^a T^a$ Werte in der Lie-Algebra hat und die Λ^a chirale Superfelder sind. Infinitesimal ist also $\delta V^a = i(\Lambda^a - \bar{\Lambda}^a)$ für jedes a , wie oben schon benutzt. Bei den folgenden Berechnungen ignorieren wir totale Ableitungen.

4.1 Allgemeine supersymmetrische Terme

Supersymmetrische Terme, die nur noch von x abhängen, bekommen wir durch Ausintegrieren der θ -Abhängigkeit der Superfelder.

Es gilt: Für ein allgemeines skalares Superfeld $F(x, \theta, \bar{\theta})$ ist

$$\int d^4\theta F(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (140)$$

supersymmetrisch, und für chirale Superfelder ist sogar schon

$$\int d^2\theta \Phi(x, \theta, \bar{\theta})|_{\bar{\theta}=0} = \int d^4\theta \delta^2(\bar{\theta}) \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (141)$$

supersymmetrisch.

Beweis: Wir zeigen, daß das Ortsintegral, also die Wirkung, invariant unter Supersymmetrietransformationen, erzeugt durch $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$, ist. Zunächst gilt

$$\int d^4x d^4\theta Q_\alpha F(x, \theta, \bar{\theta}) = \int d^4x d^4\theta i(\partial_\alpha + i_\alpha(\sigma^{\mu\bar{\nu}}\bar{\partial})_\mu) F(x, \theta, \bar{\theta}) = 0, \quad (142)$$

da die Integrale über totale Ableitungen nach x^μ oder θ_α verschwinden. Aus demselben Grund gilt auch $\int d^4x d^4\theta \bar{Q}_{\dot{\alpha}} F = 0$ und $\int d^4x d^2\theta Q_\alpha \Phi = 0$. Um zu zeigen, daß auch $\int d^4x d^2\theta \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \Phi$ verschwindet, benutzen wir die Chiralität von Φ in Form der Darstellung $\Phi = e^{-i\theta\sigma^{\mu\bar{\nu}}\bar{\partial}_\mu} \phi(x, \theta)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int d^4x d^4\theta \delta^2(\bar{\theta}) \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= \int d^4x d^4\theta \delta^2(\bar{\theta}) (-i\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}) e^{-i\theta\sigma^{\mu\bar{\nu}}\bar{\partial}_\mu} \phi(x, \theta) \\ &= \int d^4x d^4\theta \delta^2(\bar{\theta}) (-i\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}) (-i\theta\sigma^{\mu\bar{\nu}}\bar{\partial}_\mu) \phi(x, \theta) \\ &= \int d^4x d^4\theta \partial_\mu \delta^2(\bar{\theta}) (\theta\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \phi(x, \theta) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (143)$$

Damit ist die Supersymmetrieminvarianz bewiesen.

Eine wichtige, andere Formulierung desselben Sachverhalts ist: die D -Komponente jedes Superfeldes und die F -Komponente eines chiralen Superfeldes sind supersymmetrisch, bis auf totale Ableitungen. Wichtig ist auch, daß Produkte von (chiralen) Superfeldern wieder (chirale) Superfelder sind. Daher ist

$$\int d^4\theta (\text{beliebiges Produkt von Superfeldern}), \quad (144)$$

$$\int d^2\theta (\text{beliebiges Produkt von chiralen Superfeldern})|_{\bar{\theta}=0} \quad (145)$$

immer supersymmetrisch (bis auf totale Ableitungen).

4.2 Materie-Eichfeldwechselwirkungen

Renormierbare supersymmetrische Modelle können mittels der bereits eingeführten chiralen, antichiralen und Vektorsuperfelder eingeführt werden. Chirale und Antichirale Superfelder beinhalten hierbei die Skalar- und Fermionfelder, die man im Sprachgebrauch von Eichtheorien als Materiefelder bezeichnet, Vektorsuperfelder enthalten die Eichfelder und deren Superpartner.

Als ersten supersymmetrischen Term geben wir den kinetischen Term von Materiefeldern (i.e. chiralen Superfeldern), inklusive minimaler Kopplung chiraler an Vektorsuperfelder an,

$$\int d^4\theta \bar{\Phi} e^{2gV} \Phi. \quad (146)$$

Dieser Term ist supersymmetrisch und invariant unter der Eichtransformation (139).

In der Wess-Zumino-Eichung bricht die Reihe e^{2gV} ab. Es ist

$$V^2 = \frac{1}{2} \theta \bar{\theta} \theta v^\mu v_\mu \quad (147)$$

und alle höheren Potenzen von V verschwinden. In Komponenten lautet der sich ergebende Wechselwirkungsterm

$$\begin{aligned} \int d^4\theta \bar{\Phi} e^{2gV} \Phi = & F^\dagger F + (\partial^\mu A^\dagger - ig A^\dagger v^\mu)(\partial_\mu A + ig v_\mu A) + \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu (i\partial_\mu - gv_\mu) \psi \\ & - \sqrt{2} g (i\bar{\psi} \bar{\lambda} A - A^\dagger i \lambda \psi) + g A^\dagger D A \end{aligned} \quad (148)$$

Hier taucht nun die eichkovariante Ableitung auf:

$$D_\mu := \partial_\mu + ig v_\mu. \quad (149)$$

Die Felder F haben keine kinetischen Terme. Sie sind Hilfsfelder, die später durch Einsetzen ihrer Feldgleichungen eliminiert werden können.

4.3 Superpotential

Eine weitere offensichtlich supersymmetrische Klasse von Termen ist

$$\int d^2\theta W(\Phi),$$

wobei W ein Polynom maximal dritten Grades in chiralen Superfeldern ist. Wir nennen W das Superpotential. Die Komponentenzерlegungen von entsprechenden Termen sind:

$$\int d^2\theta \Phi_1 \Phi_2 = A_1 F_2 + F_1 A_2 - \psi_1 \psi_2, \quad (150)$$

$$\begin{aligned} \int d^2\theta \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 = & F_1 A_2 A_3 + A_1 F_2 A_3 + A_1 A_2 F_3 \\ & - A_1 \psi_2 \psi_3 - \psi_1 A_2 \psi_3 - \psi_1 \psi_2 A_3 \end{aligned} \quad (151)$$

Wichtig ist, daß die Terme mit den Spinoren ein anderes Vorzeichen haben. Es kommt von der Gleichung $(\psi_1 \theta)(\psi_2 \theta) = -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\psi_1 \psi_2)$.

4.4 Kinetische Terme der Eichfelder

Exemplarisch betrachten wir die kinetischen Terme für die Vektorsuperfelder ausführlcher. Wir definieren chirale und antichirale Feldstärken:

$$W_\alpha := -\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} (e^{-2gV} D_\alpha e^{2gV}) \quad (152)$$

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} := -\frac{1}{4} D D ((\bar{D}_{\dot{\alpha}} e^{2gV}) e^{-2gV}) \quad (153)$$

Die Feldstärken transformieren kovariant unter Eichtransformationen:

$$W_\alpha \rightarrow e^{-2ig\Lambda} W_\alpha e^{2ig\Lambda}, \quad (154)$$

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} \rightarrow e^{-2ig\bar{\Lambda}} \bar{W}_{\dot{\alpha}} e^{2ig\bar{\Lambda}}. \quad (155)$$

In der Wess-Zumino-Eichung gibt es folgende Summanden zu W_α :

$$(1) = \frac{\bar{D}\bar{D}}{-4} D_\alpha 2gV,$$

$$(2) = \frac{\bar{D}\bar{D}}{-4} D_\alpha 2g^2 VV,$$

$$(3) = \frac{\bar{D}\bar{D}}{-4} (-2gV) D_\alpha 2gV,$$

$$(4) = \frac{\bar{D}\bar{D}}{-4} (-2gV) D_\alpha 2g^2 VV,$$

$$(5) = \frac{\bar{D}\bar{D}}{-4} (2g^2 VV) D_\alpha 2gV,$$

$$(6) = \frac{\bar{D}\bar{D}}{-4} (2g^2 VV) D_\alpha 2g^2 VV.$$

Zur Berechnung der Komponenten von W_α benutzen wir die chirale Basis, ohne dies durch einen Index zu kennzeichnen. Der einzige Unterschied in der Komponentenzерlegung von V ist dabei, daß $v_\mu(x)$ durch

$$v_\mu(x + i\theta\bar{\theta}) = v_\mu(x) + i\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\partial_\nu v_\mu(x)$$

zu ersetzen ist. Es ist anhand der Komponentenzерlegung von V nun leicht zu sehen, daß die Terme (4), (5), (6) verschwinden. Die anderen Terme sind mit der Abkürzung $v_{\mu\nu} := \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$:

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{\bar{D}\bar{D}}{-4} \left[\partial_\alpha 2gV - 2i_\alpha (\sigma^\mu \bar{\theta}) \partial_\mu 2gV \right] \\ &= -2ig\lambda_\alpha + 2g\theta_\alpha D - 2g_\alpha (\sigma^\mu \bar{\partial}_\mu \bar{\lambda}) \theta\theta \\ &\quad + \frac{\bar{D}\bar{D}}{-4} \left[ig_\alpha (\sigma^\mu \bar{\theta}) \theta \sigma^\nu \bar{\theta} \partial_\nu v_\mu + ig\theta \sigma^\mu \bar{\theta}_\alpha (\sigma^\nu \bar{\theta}) \partial_\nu v_\mu - 2ig_\alpha (\sigma^\mu \bar{\theta}) \partial_\mu \sigma^\nu \bar{\theta}_\nu \right] \\ &= -2ig\lambda_\alpha + 2g\theta_\alpha D - ig_\alpha (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \theta) v_{\mu\nu} - 2g_\alpha (\sigma^\mu \bar{\partial}_\mu \bar{\lambda}) \theta\theta, \end{aligned} \quad (156)$$

$$(2) = 2g^2 \theta_\alpha v^2. \quad (157)$$

Da jeder Term in V mindestens ein $\bar{\theta}$ enthält, trägt zu (3) nur der ∂_α -Anteil von D_α bei:

$$(3) = \frac{\bar{D}\bar{D}}{-4} (-2gV) \partial_\alpha 2gV$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\overline{D}\overline{D}}{-4}(-4g^2)V\left[\alpha(\sigma^{\mu\overline{\theta}})v_\mu + 2i\partial_\alpha\overline{\theta}\overline{\lambda} - i\overline{\theta}\partial_\alpha\overline{\theta}\overline{\lambda} + \theta_\alpha\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{D}\right] \\
&= \frac{\overline{D}\overline{D}}{-4}(-4g^2)V\left[\alpha(\sigma^{\mu\overline{\theta}})v_\mu + 2i\partial_\alpha\overline{\theta}\overline{\lambda}\right] \\
&= \frac{\overline{D}\overline{D}}{-4}(-4g^2)\left[\theta\sigma^{\mu\overline{\theta}}\overline{\theta}v_\nu\alpha(\sigma^{\mu\overline{\theta}})v_\mu + 2i\partial\sigma^{\mu\overline{\theta}}\overline{\theta}v_\nu\theta_\alpha\overline{\theta}\overline{\lambda} + i\overline{\theta}\partial\theta\overline{\lambda}\alpha(\sigma^{\mu\overline{\theta}})v_\mu\right] \\
&= \frac{\overline{D}\overline{D}}{-4}(-4g^2)\left[\frac{1}{2}\overline{\theta}\theta\alpha(\sigma^{\mu\overline{\theta}}\overline{\theta})v_\nu v_\mu + \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta\partial\alpha(\sigma^{\mu\overline{\theta}}v_\nu\overline{\lambda}) - \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta\partial\theta\alpha(\sigma^{\mu\overline{\lambda}})v_\mu\right] \\
&= -4g^2\left[\frac{1}{2}\alpha(\sigma^{\mu\overline{\theta}}\overline{\theta})v_\nu v_\mu + \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta\alpha(v^{\mu}\sigma_{\mu}\overline{\lambda} - \sigma_{\mu}\overline{\lambda}v^{\mu})\right].
\end{aligned} \tag{158}$$

In der Summe taucht nun der Kommutator

$$igF_{\mu\nu} := [D_\mu, D_\nu] = ig(v_\mu + ig[v_\mu, v_\nu]), \tag{159}$$

auf. Bei einer abelschen Eichgruppe wäre offenbar (2) + (3) = 0. Insgesamt:

$$\begin{aligned}
W_\alpha &= -2ig\lambda_\alpha + 2g\theta_\alpha D - \alpha(\sigma^{\mu\overline{\theta}}\overline{\theta})[D_\mu, D_\nu] \\
&\quad - 2g\overline{\theta}\theta\left(\alpha(\sigma^{\mu\overline{\theta}}\overline{\lambda}) + ig[v^\mu, \alpha(\sigma_\mu\overline{\lambda})]\right).
\end{aligned} \tag{160}$$

Bei dem Produkt $\int d^2\theta W^\alpha W_\alpha$ taucht als einzige Schwierigkeit folgender Term auf:

$$\begin{aligned}
\alpha(\sigma^{\mu\overline{\theta}}\overline{\theta})_\alpha(\sigma^{\nu\overline{\theta}}\overline{\theta}) &= \epsilon^{\alpha\beta}{}_\beta(\sigma^{\mu\overline{\theta}}\overline{\theta})_\alpha(\sigma^{\nu\overline{\theta}}\overline{\theta}) \\
&= \theta\sigma^{\mu\overline{\theta}}\overline{\theta}^\mu\sigma^{\nu\overline{\theta}}\overline{\theta} \\
&= \frac{1}{2}\overline{\theta}\theta\text{Tr}(\sigma^{\nu\overline{\theta}}\sigma^{\mu\overline{\theta}}\sigma^{\nu\overline{\theta}}) \\
&= \overline{\theta}\theta(g^{\mu\nu}g^{\sigma\sigma} - g^{\nu\mu}g^{\sigma\sigma} + g^{\nu\sigma}g^{\mu\sigma} + i\epsilon^{\nu\mu\sigma\sigma}).
\end{aligned} \tag{161}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int d^2\theta W^\alpha W_\alpha &= 4ig^2\lambda\sigma^\mu(\partial_\mu\overline{\lambda} + ig[v_\mu, \overline{\lambda}]) \\
&\quad - 4ig^2(\partial^\mu\overline{\lambda} + ig[v^\mu, \overline{\lambda}])\overline{\sigma}_\mu\lambda \\
&\quad + 4g^2DD + 2([D_\mu, D_\nu])^2 + \text{tot.Abl.}
\end{aligned} \tag{162}$$

Die totale Ableitung, die hierbei auftaucht, stammt von dem Term proportional zu $\epsilon^{\nu\mu\sigma\sigma}F_{\mu\nu}F_{\sigma\sigma}$, der störungstheoretisch keine Rolle spielt, aber nichtstörungstheoretische Effekte produzieren kann.

Wir erhalten endlich den eichinvarianten und supersymmetrischen kinetischen Term durch Bilden der Spur dieses Ausdrucks. Dabei verwenden wir die Normierung

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \kappa\delta^{ab} \tag{163}$$

der Generatoren der Eichgruppe und die Definition

$$[T^a, T^b] = if_{abc}T^c \tag{164}$$

der Strukturkonstanten. Die adjungierte Darstellung der Lie-Algebra ist durch $(T^{ad})^a_{bc} = -if_{abc}$ gegeben. Diese adjungierte Darstellung tritt in der kovarianten Ableitung von λ^a auf. Der Feldstärkensor ist durch

$$F_{\mu\nu}^a = v_{\mu\nu}^a - ig(T^{ad})^{abc}v_\mu^b v_\nu^c \tag{165}$$

gegeben. Der kinetische Term ist für die Eichfelder, die Gauginos, und deren Wechselwirkung (die durch Supersymmetrie und Eichinvarianz bestimmt ist) ist:

$$\begin{aligned}
&\int d^4\theta \frac{1}{16g^2\kappa} \text{Tr} [W^\alpha W_\alpha \delta^2(\overline{\theta}) + h.c.] \\
&= \int d^4\theta \frac{1}{16g^2} [W^\alpha W_\alpha \delta^2(\overline{\theta}) + h.c.] \\
&= \frac{1}{2}D^\alpha D^\alpha - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{i}{2}\overline{\lambda}^\alpha \overline{\sigma}^\mu (D_\mu \lambda)^a + \frac{i}{2}\lambda^a \sigma^\mu (D_\mu \overline{\lambda})^a.
\end{aligned} \tag{166}$$

Die Hilfsfelder D^a haben offenbar keinen kinetischen Term.

4.5 Lagrangedichte eines allgemeinen Modells

Wir betrachten ein Modell, das ein Materiemultipllett aus chiralen Superfeldern Φ und ein Vektorfeldmultipllett $V = T^a V^a$ enthalte. Die Darstellung der Eichgruppe auf dem Materiemultipllett muß dabei nicht irreduzibel sein. Die allgemeine eichinvariante, supersymmetrische und renormierbare Lagrangedichte ist dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \int d^4\theta \left(\overline{\Phi} e^{2\theta V} \Phi + \frac{1}{16g^2} (W^\alpha W_\alpha \delta^2(\overline{\theta}) + h.c.) \right. \\
&\quad \left. + (W^\alpha \delta^2(\overline{\theta}) + h.c.) \right).
\end{aligned} \tag{167}$$

Dabei ist das Superpotential W ein Polynom dritten Grades in den chiralen Superfeldern:

$$W(\Phi) = c_i \Phi_i + \frac{m_{ij}}{2} \Phi_i \Phi_j + \frac{g_{ijk}}{3!} \Phi_i \Phi_j \Phi_k. \tag{168}$$

Die Kopplungen m_{ij}, g_{ijk} seien total symmetrisch.

Weitere Terme kann es in der Lagrangedichte nicht geben wegen Eichinvarianz und da höhere Potenzen von Φ zu nichtrenormierbaren Termen (i.e. Termen mit Dimension > 4) führen würden.

Nun eliminieren wir die Hilfsfelder D^a und F_i . Die Lagrangefunktion enthält keine kinetischen Terme für die Hilfsfelder, so daß die entsprechenden kanonischen Impulse identisch verschwinden. Dies und die Bewegungsgleichungen für die Hilfsfelder bilden Einschränkungen zweiter Klasse zwischen den kanonischen Variablen.

Nach [13], Anhang 7A, ist das naive Vorgehen richtig, die Lösungen der Hilfsfeldgleichungen in die Lagrangefunktion einzusetzen und die Hilfsfelder dadurch zu eliminieren. Die Summe aller Terme, die D^a enthalten, ist:

$$\mathcal{L}_D = \frac{1}{2} D^a D^a + A^\dagger g T^a D^a A. \quad (169)$$

Also ist die Lösung der Bewegungsgleichung für D^a durch $D^a = -A^\dagger g T^a A$ gegeben. Setzen wir diese Gleichungen in die Lagrangedichte ein, ist

$$\mathcal{L}_D = -\frac{1}{2} (A^\dagger g T^a A)^2. \quad (170)$$

Die Summe aller Terme, die F_i , $F_i^\dagger$ enthalten, ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= F_i^\dagger F_i + \left(c_i F_i + m_{ij} F_i A_j + \frac{g_{ijk}}{2} F_i A_j A_k + h.c. \right) \\ &= F_i^\dagger F_i + \left(\frac{\partial W(A)}{\partial A_i} F_i + h.c. \right). \end{aligned} \quad (171)$$

Die Lösungen der Feldgleichungen sind $F_i^\dagger = -\frac{\partial W(A)}{\partial A_i}$. Damit ist

$$\mathcal{L}_F = - \left| \frac{\partial W(A)}{\partial A_i} \right|^2. \quad (172)$$

Nachdem $\mathcal{L}_D + \mathcal{L}_F$ alle Hilfsfeldterme enthalten, geben wir nun alle übrigen Terme an. Wir verwenden die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + ig T^a v_\mu^a, \quad (173)$$

in die bei Anwendung auf die Gauginos λ^a die adjungierte Darstellung eingesetzt werden muß.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{min.Koppl.}} &= (D^\mu A)^\dagger (D_\mu A) + \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu i D_\mu \psi \\ &\quad - \sqrt{2} g (i \bar{\psi} \bar{\lambda} A - A^\dagger i \lambda \psi) \end{aligned} \quad (174)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Superpot.}} &= -\frac{m_{ij}}{2} \psi_i \psi_j - \frac{g_{ijk}}{2} \psi_i \psi_j A_k + h.c. \\ &= -\frac{1}{2} \psi_i \psi_j \frac{\partial^2 W(A)}{\partial A_i \partial A_j} + h.c. \end{aligned} \quad (175)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Eichfelder}} &= -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 \\ &\quad + \frac{i}{2} \bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \lambda)^a + \frac{i}{2} \lambda^a \sigma^\mu (D_\mu \bar{\lambda})^a. \end{aligned} \quad (176)$$

Nach Elimination der Hilfsfelder ist die Lagrangedichte dieses Modells also

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{min.Koppl.}} + \mathcal{L}_{\text{Eichfelder}} + \mathcal{L}_{\text{Superpot.}} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_F. \quad (177)$$

Die Lagrangedichte enthält die Weylfermionen $\psi_{i\alpha}$ und komplexen Skalarfelder A_i , die Vektorfelder v_μ^a und Gauginos λ_α^a . Die Wechselwirkungen aller Felder (auch der Gauginos und Vektorfelder) mit den Vektorfeldern sind bereits eindeutig durch Eichinvarianz bestimmt. Die Supersymmetrie bestimmt zusätzlich die Wechselwirkungen der Gauginos mit den $\psi_{i\alpha}$ und A_i , die 4-Skalar-Wechselwirkungen in $\mathcal{L}_D + \mathcal{L}_F$ (die sogenannten D - und F -Terme) und Relationen zwischen den einzelnen Superpotentialtermen.