

Mathematik II (für IF, ET und Ph)

Sommersemester 2020

1. Übung: Folgen

Aufgabe 1

Die ersten Glieder zweier Folgen lauten:

(a) $\frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots$

(b) $-2, -5, -8, -11, -14, \dots$

Können diese als arithmetische oder geometrische Folge fortgesetzt werden?

Wenn ja, geben Sie eine explizite und eine rekursive Bildungsvorschrift der Folge an und setzen die Folge entsprechend dieser Bildungsvorschrift um drei Glieder fort.

Aufgabe 2

Zeigen Sie anhand der Grenzwertdefinition, dass (a_n) mit $a_n = \frac{1}{2n-1}$ eine Nullfolge ist. Wie groß ist $n_0 \in \mathbb{N}$ mindestens zu wählen, dass $|a_n| < 10^{-4}$ für $n \geq n_0$ gilt?

Aufgabe 3

Für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$, und was ist der entsprechende Wert?

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{11-n^2}{n+2}$,

(b) $a_n = \frac{(n+1)^2}{n^2+1}$,

(c) $a_n = \frac{n-4}{n^2+3n+8}$,

(d) $a_n = \frac{3n^5+n^3-1}{12n^5+23}$,

(e) $a_n = (-1)^n \frac{n^2+n+2}{5n^2+4n+3}$,

(f) $a_n = (-1)^n \frac{n^2+2}{5n^3+4n+3}$,

(g) $a_n = \frac{2^n+(-2)^n}{2^n}$,

(h) $a_n = \frac{2^n+(-2)^n}{5^n}$.

Aufgabe 5

Untersuchen Sie die angegebenen Zahlenfolgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Ermitteln Sie ggf. den Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{n+3}{n}$, (b) $b_n = 1 + 2^n + (-2)^n$, (c) $c_n = \sqrt{1 - \cos(\frac{1}{n})}$.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \sqrt[n]{4n}\right)$.

Aufgabe 7

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{1+2+\dots+n}{9n+1}$, (b) $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, (c) $c_n = \sqrt[n]{3^n+2^n}$, (d) $d_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{n\pi}{2}$, (e) $e_n = n^{(-1)^n}$.