

Mathematik II (für IF, ET und Ph)

Sommersemester 2020

4. Übung: Differentialrechnung I

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$ auf Differenzierbarkeit.

$$(a) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases} \quad (b) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Hinweis: Betrachten Sie den Grenzwert des Differenzenquotienten.

Aufgabe 2

Ist die Funktion $f(x) = a|x|x^4$ mit $a \in \mathbb{R}$ überall differenzierbar? (*Hinweis:* wie vorherige Aufgabe.)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die folgende Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & x < 0, \\ \beta x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

Aufgabe 4

- (a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von $f(x) = \ln x$ an der Stelle $x = 2$.
- (b) An welchen Stellen verläuft die Tangente an den Graphen von $g(x) = x^2$ parallel bzw. senkrecht zur Tangenten t aus Aufgabenstellung (a)?

Hinweis: Die Graphen zweier linearer Funktionen $h_i(x) = m_i x + c_i$, $i = 1, 2$, stehen senkrecht aufeinander, wenn für deren Anstiege die Beziehung $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ gilt.

In den nächsten 5 Aufgaben sind jeweils die ersten Ableitungen zu bilden. Jede Aufgabe hat dabei einen gewissen Schwerpunkt (welchen?).

Aufgabe 5

$$(a) f(x) = \frac{42}{x}, \quad (b) f(x) = \frac{1}{x^2 \sqrt{x}}, \quad (c) f(x) = x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 42.$$

Aufgabe 6

- (a) $f(x) = (2x^2 + 4x)(3x^3 - 2x^2 + 3x)$, (b) $f(x) = (4ax^2 + x)\sqrt{x^3}$, $a \in \mathbb{R}$,
(c) $f(x) = x^n a^x$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7

- (a) $f(x) = \frac{2 \sin x + \cos x}{x^2}$, (b) $f(x) = \frac{e^x + \ln x}{\sin x}$, (c) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$.

Aufgabe 8

- (a) $f(x) = \sin(x^2)$, (b) $f(x) = \sqrt{(x^2 + 4x)^3}$, (c) $f(x) = \ln(\tan x)$.

Aufgabe 9

- (a) $f(x) = (2x)^{\sin x}$, $x > 0$, (b) $f(x) = \sqrt{x}^{\tan x}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 10

Wie lautet die k -te Ableitung von

- (a) $f(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$, (b) $f(x) = xe^x$?

Aufgabe 11

Bestätigen Sie $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ mit Hilfe des Satzes über die Umkehrfunktion.