

## **Mathematik II (für IF, ET und Ph)**

Sommersemester 2020

### **6. Übung: Integralrechnung**

#### **Aufgabe 1**

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion  $F(x) = 5 - 2\sqrt{5 + \cos x}$  eine Stammfunktion von  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5 + \cos x}}$  ist.
- (b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral  $\int x^4 + 3x\sqrt{x} - 2 + \frac{4}{x^2} dx$ .

#### **Aufgabe 2**

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung folgende Ungleichungen:

- (a)  $\sin(x) \leq x$  für  $x \in (0, \infty)$ ,    (b)  $\exp(x) > 1 + x$  für  $x \in (0, \infty)$ ,  
(c)  $1 - \frac{1}{x} < \ln(x) < x - 1$  für  $x \in (1, \infty)$ .

#### **Aufgabe 3**

Berechnen Sie folgende bestimmte und unbestimmte Integrale mittels Substitution. Führen Sie für die unbestimmten Integrale eine Probe für Ihr Ergebnis durch!

- (a)  $\int \frac{dx}{(2x-1)^3}$ ,    (b)  $\int x^2 \sqrt[3]{x^3 - 8} dx$ ,    (c)  $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7} dx$ ,    (d)  $\int \frac{3e^x}{\sqrt{e^x-1}} dx$ ,  
(e)  $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ ,    (f)  $\int \tan x dx$ ,    (g)  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\sin^2 x} dx$  (Tipp: Additionstheorem).

#### **Aufgabe 4**

Berechnen Sie folgende bestimmte und unbestimmte Integrale mittels partieller Integration.

- (a)  $\int x e^{-2x} dx$ ,    (b)  $\int \sqrt{x} \ln x dx$ ,    (c)  $\int_1^e \ln x dx$ ,    (d)  $\int_0^\pi x^2 \sin x dx$ ,  
(e)  $\int \arcsin x dx$  (Tipp: Partielle Integration, dann Substitution).

#### **Aufgabe 5**

Integrieren Sie unter Nutzung der Partialbruchzerlegung.

- (a)  $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$ ,    (b)  $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx$ ,    (c)  $\int \frac{dx}{x^2+3x+2}$ .

#### **Aufgabe 6**

Überprüfen Sie folgende Integrale auf Existenz und bestimmen Sie ggf. deren Wert.

- (a)  $\int_0^\infty e^{-\pi x} dx$ ,    (b)  $\int_0^\infty \sin x dx$ ,    (c)  $\int_0^{42} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ,    (d)  $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ .

### Aufgabe 7

Der neue EDISON wird bei einer Probefahrt aus dem Stand zum Zeitpunkt  $t = 0$  mit einer Beschleunigung von  $a(t) = \frac{2}{1+t}$  bis zum Zeitpunkt  $t = 1$  angetrieben und danach mit konstanter negativer Beschleunigung bis zum Stillstand in  $t = 3$  abgebremst. Wie lang war die Probestrecke des neuen EDISONS? (Annahme: gerader Weg).

### Aufgabe 8

Bond sitzt gelangweilt an der Bar des Casino Royale und betrachtet das seltsame Martiniglas, welches er soeben geleert hat. Sein geübtes Agentenauge schätzt die Höhe des Glases auf ca. 1 und er vermutet richtig, dass die Randkurve des (horizontal gehaltenen) Glases in etwa der Funktion

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)}}{\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)}$$

zwischen  $[0, 1]$  folgt. Wieviel Wodka-Martini passt in dieses Glas?

