

Mathematik II (für IF, ET und Ph)

Sommersemester 2020

7. Übung: Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Die Abkühlung eines erhitzten Körpers in einer (kälteren) Umgebung sei proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Körper und Umgebung.

- (a) Stellen Sie die Differentialgleichung für die Temperatur des Körpers auf!
- (b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung!
- (c) In welcher Zeit kühlt ein auf 100°C erhitzter Körper auf 30°C ab, wenn er bereits nach einer Stunde auf 60°C abgekühlt ist und die Raumtemperatur 20°C beträgt?

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$N(t) = \frac{K}{1 + C e^{-rt}}, \quad C \in \mathbb{R},$$

Lösungen der *logistischen Differentialgleichung*

$$N'(t) = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right), \quad K > 0, r > 0,$$

sind. Berechnen Sie die spezielle Lösung zur Anfangsbedingung $N(0) = \frac{K}{10}$.

Aufgabe 3

Skizzieren Sie das Richtungsfeld zur Differentialgleichung $y'(t) = -\frac{t}{y}$ und zeichnen Sie einige Isoklinen ein. Für welche Anfangspunkte $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existieren Lösungen der Differentialgleichung und wie verlaufen diese?

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen. Wo Anfangsbedingungen gegeben sind, lösen Sie bitte zusätzlich das angegebene Anfangswertproblem.

- (a) $y' = ty^2$, (b) $y' - y \cos(t) = 3 \cos(t)$, $y(0) = 5$, (c) $f'(t) = \frac{tf(t)}{1-t^2}$, $f(0) = 42$,
- (d) $2y'\sqrt{t} = y$, $y(4) = 1$, (e) $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$.

Aufgabe 5

Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen an. Führen Sie zunächst die angegebene Variablensubstitution durch, um eine für die Trennung der Veränderlichen geeignete Struktur der Differentialgleichung zu erhalten.

(a) $y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2, \quad z = \frac{y}{t},$

(b) $ty' = y(1 + \ln y - \ln t), \quad z = \frac{y}{t},$

(c) $y' = \frac{1}{2}(t + 2y)^2, \quad z = t + 2y.$