

Lösungen zur Vorlesung Höhere Mathematik II

Prof. Peter Stollmann, Clemens Bombach,
Masoumeh Hashemi, Lutz Kämmerer, Jean Daniel Mukam,
Michael Quellmalz, und Martin Tautenhahn

TU Chemnitz

SS 2020

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x) = 5 - 2\sqrt{5 + \cos x}$ eine Stammfunktion von $f(x) = (\sin x)/(\sqrt{5 + \cos x})$ ist.
- (b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \left(x^4 + 3x\sqrt{x} - 2 + \frac{4}{x^2} \right) dx.$$

Lösung:

- (a) Zu zeigen $F'(x) = f(x)$. Dies gilt, da

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(5 - 2\sqrt{5 + \cos x} \right) = - \frac{-\sin x}{\sqrt{5 + \cos x}}.$$

- (b) Aus den Integrationsregeln für Polynome folgt (mit $c \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \int \left(x^4 + 3x\sqrt{x} - 2 + \frac{4}{x^2} \right) dx &= \int x^4 dx + \int 3x^{3/2} dx - \int 2 dx + \int 4x^{-2} dx \\ &= \frac{1}{5}x^5 + 3\frac{2}{5}x^{5/2} - 2x - 4x^{-1} + c \\ &= \frac{x^5}{5} + \frac{6}{5}x^{5/2} - 2x - \frac{4}{x} + c. \end{aligned}$$

Aufgabe 6.2

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung folgende Ungleichungen:

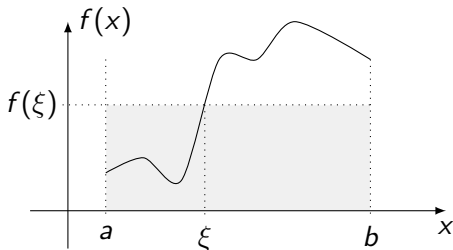
- (a) $\sin(x) \leq x$ für $x \in (0, \infty)$,
- (b) $\exp(x) > 1 + x$ für $x \in (0, \infty)$,
- (c) $1 - \frac{1}{x} < \ln(x) < x - 1$ für $x \in (1, \infty)$

Wiederholung (Mittelwertsatz der Integralrechnung):

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

Manchmal ist sogar $\xi \in (a, b)$.



Lösung:

- (a) Nach MWS der Integralrechnung existiert ein $\xi \in [0, x]$ mit

$$\int_0^x \cos(y) dy = \sin x - \sin 0 = \sin x = \cos(\xi)(x - 0).$$

Da $\cos(\xi) \leq 1$ folgt die Behauptung.

- (b) Nach dem MWS der Integralrechnung existiert ein $\xi \in (0, x)$ $\triangle!$ mit

$$\int_0^x \exp(y) dy = \exp(x) - \exp(0) = \exp(x) - 1 = x \exp(\xi).$$

Da $\xi > 0$ folgt $\exp(\xi) > 1$ und damit die Behauptung.

- (c) Nach dem MWS der Integralrechnung existiert ein $\xi \in (1, x)$ $\triangle!$ mit

$$\int_1^x \frac{1}{y} dy = \ln(x) - \ln(1) = \ln(x) = \frac{x-1}{\xi},$$

Setzen wir nun die untere bzw. obere Schranke für ξ ein folgt

$$\ln(x) < \frac{x-1}{1} = x-1 \quad \text{und} \quad \ln(x) > \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Aufgabe 6.3

Berechnen Sie folgende bestimmte und unbestimmte Integrale mittels Substitution. Führen Sie für die unbestimmten Integrale eine Probe für Ihr Ergebnis durch!

$$(a) \int \frac{dx}{(2x-1)^3},$$

$$(b) \int x^2 \sqrt[3]{x^3 - 8} dx,$$

$$(c) \int \frac{2x+4}{x^2+4x+7} dx,$$

$$(d) \int \frac{3e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx,$$

$$(e) \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx,$$

$$(f) \int \tan x dx,$$

$$(g) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\sin^2 x} dx$$

Lösung:

(a) Substitution $y = y(x) = 2x - 1$, $y'(x) = 2$ ("dy = 2dx"):

$$\int \frac{1}{(2x-1)^3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^3} dy = -\frac{1}{2 \cdot 2y^2} + c = -\frac{1}{4(2x-1)^2} + c.$$

(b) Substitution $y(x) = x^3 - 8$, $y'(x) = 3x^2$:

$$\int x^2 \sqrt[3]{x^3 - 8} dx = \frac{1}{3} \int y^{1/3} dy = \frac{3}{3 \cdot 4} y^{4/3} + c = \frac{1}{4} \sqrt[3]{(x^3 - 8)^4} + c.$$

(c) Substitution $y(x) = x^2 + 4x + 7$, $y'(x) = 2x + 4$:

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7} dx = \int \frac{1}{y} dy = \ln|y| + c = \ln|x^2+4x+7| + c.$$

(d) Substitution $y(x) = e^x - 1$, $y'(x) = e^x$:

$$\int \frac{3e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = 3 \int y^{-1/2} dy = 3 \cdot 2y^{1/2} + c = 6\sqrt{e^x - 1} + c.$$

(e) Substitution $y(x) = \ln x$, $y'(x) = 1/x$:

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int_0^1 y^{1/2} dy = \frac{2}{3} y^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

(f) Substitution $y(x) = \cos(x)$, $y'(x) = -\sin(x)$:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{1}{y} dy = -\ln |y| + c = -\ln(\cos x) + c.$$

(g) Zunächst erhalten wir mittels Additionstheorem

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\sin^2 x} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} 2 \frac{\cos x}{\sin x} dx.$$

und mittels Substitution $y(x) = \sin x$, $y'(x) = \cos x$,

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} 2 \frac{\cos x}{\sin x} dx = 2 \int_{0.5}^1 \frac{1}{y} dy = 2 \ln |y| \Big|_{0.5}^1 = 2 \ln 2.$$

Aufgabe 6.4

Berechnen Sie folgende bestimmte und unbestimmte Integrale mittels partieller Integration.

$$(a) \int x e^{-2x} dx$$

$$(d) \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$$

$$(b) \int \sqrt{x} \ln x dx$$

$$(e) \int \arcsin x dx$$

$$(c) \int_1^e \ln x dx$$

Wiederholung (Partielle Integration): Ist $[a, b]$ ein Intervall und sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen auf $[a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Im Falle unbestimmter Integrale gilt

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Lösung:

(a) $f(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $f'(x) = e^{-2x}$, $g(x) = x$, $g'(x) = 1$:

$$\int x e^{-2x} dx \stackrel{PI}{=} -\frac{x}{2} e^{-2x} - \int -\frac{1}{2} e^{-2x} dx = -\frac{x}{2} e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + c.$$

(b) $f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $f'(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln x$, $g'(x) = 1/x$:

$$\int \sqrt{x} \ln x dx \stackrel{PI}{=} \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \int \frac{2}{3} x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} + c$$

(c) $f(x) = x$, $f'(x) = 1$, $g(x) = \ln x$, $g'(x) = 1/x$:

$$\int_1^e \ln x dx \stackrel{PI}{=} x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} dx = (e - 0) - (e - 1) = 1.$$

(d) $f(x) = -\cos x$, $f'(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2 \sin x dx &\stackrel{PI}{=} -x^2 \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi 2x \cos x dx \\ &= (\pi^2 - 0) + \int_0^\pi 2x \cos x dx.\end{aligned}$$

Weitere Anwendung partieller Integration mit

$f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $g(x) = 2x$, $g'(x) = 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi 2x \cos x dx &\stackrel{PI}{=} 2x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2 \sin x dx \\ &= (0 - 0) + \left(2 \cos x \Big|_0^\pi\right) = -2 - 2 = -4.\end{aligned}$$

Insgesamt folgt also

$$\int_0^\pi x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4.$$

(e) $f(x) = x$, $f'(x) = 1$, $g(x) = \arcsin x$, $g'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$:

$$\int \arcsin x dx \stackrel{PI}{=} x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Nun folgt mittels Substitution $y(x) = 1 - x^2$, $y'(x) = -2x$,

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y(x)}} y'(x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = -\sqrt{y} + c = -\sqrt{1-x^2} + c. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

Aufgabe 6.5

Integrieren Sie unter Nutzung der Partialbruchzerlegung.

$$(a) \int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)} dx,$$

$$(b) \int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx,$$

$$(c) \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 2}.$$

Lösung:

- (a) Zunächst erkennen wir die schon gegebene Zerlegung des Nennerpolynoms $q(x) = (x-2)(x+5)$. Wir machen entsprechend den folgenden Ansatz für die echt gebrochen rationale Funktion

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}.$$

Multiplikation mit $q(x)$ liefert

$$2x+3 = A(x+5) + B(x-2) = (A+B)x + (5A-2B).$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$A+B=2, \quad 5A-2B=3.$$

Lösen des Gleichungssystems ergibt

$$A=1 \quad \text{und} \quad B=1.$$

Es folgt

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx = \int \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+5} dx = \ln|x-2| + \ln|x+5| + c.$$

(b) Zunächst Zerlegung in Linearfaktoren:

$$q(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2.$$

Entsprechender Ansatz:

$$\frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}.$$

Dieser liefert nach Multiplikation mit $q(x)$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 1 &= A(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 - x) + Cx \\ &= (A + B)x^2 + (-2A - B + C)x + A. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert das System

$$A + B = 2, \quad -2A - B + C = -5, \quad A = 1.$$

Lösen des Gleichungssystems ergibt $A = 1$, $B = 1$, und $C = -2$.

Also

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)} dx &= \int \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} - \frac{2}{(x - 1)^2} dx \\ &= \ln |x| + \ln |x - 1| + \frac{2}{x - 1} + c. \end{aligned}$$

(c) Wir erkennen die Zerlegung des Nennerpolynoms $q(x) = x^2 + 3x + 2$ über die Berechnung seiner Nullstellen

$$x_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Also

$$q(x) = x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2).$$

Entsprechender Ansatz

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2}$$

liefert nach Multiplikation mit $q(x)$

$$1 = A(x + 2) + B(x + 1) = (A + B)x + (2A + B).$$

Dies ergibt $A + B = 0$, $2A + B = 1$ bzw. $A = 1$ und $B = -1$. Es folgt

$$\int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx = \int \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2} dx = \ln |x + 1| - \ln |x + 2| + c.$$

Aufgabe 6.6

Überprüfen Sie folgende Integrale auf Existenz und bestimmen Sie ggf. deren Wert.

$$(a) \int_0^{\infty} e^{-\pi x} dx$$

$$(c) \int_0^{42} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$(b) \int_0^{\infty} \sin x dx$$

$$(d) \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Lösung:

(a) Schwierigkeit hier: unbeschränkter Integrationsbereich.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\pi x} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-\pi x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left. -\frac{1}{\pi} e^{-\pi x} \right|_0^R \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} (1 - e^{-\pi R}) = \frac{1}{\pi} (1 - 0) = \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

(b) Schwierigkeit hier: unbeschränkter Integrationsbereich.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \sin x dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \sin x dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} -\cos x \Big|_0^R = \lim_{R \rightarrow \infty} (1 - \cos R).\end{aligned}$$

Dieser Grenzwert existiert nicht, da $\lim_{R \rightarrow \infty} \cos R$ nicht existiert.

(c) Schwierigkeit hier: Funktion unbeschränkt im Integrationsbereich durch Polstelle in $x = 0$.

$$\begin{aligned}\int_0^{42} \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{R \rightarrow 0} \int_R^{42} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{R \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_R^{42} \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} 2(\sqrt{42} - \sqrt{R}) = 2(\sqrt{42} - 0) = 2\sqrt{42}.\end{aligned}$$

(d) Schwierigkeit hier: unbeschränkter Integrationsbereich.

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} 2(\sqrt{R} - \sqrt{1}) = +\infty.\end{aligned}$$

Aufgabe 6.7

Der neue EDISON wird bei einer Probefahrt aus dem Stand zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer Beschleunigung von $a(t) = \frac{2}{1+t}$ bis zum Zeitpunkt $t = 1$ angetrieben und danach mit konstanter negativer Beschleunigung bis zum Stillstand in $t = 3$ abgebremst. Wie lang war die Probestrecke des neuen EDISONS? (Annahme: gerader Weg).

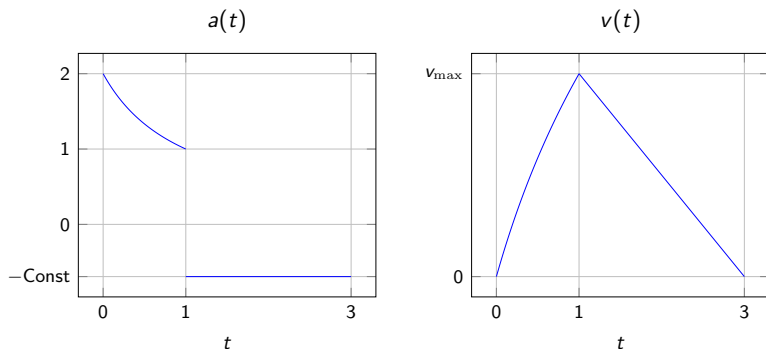


Abbildung: Illustration zum Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsverlauf

Lösung: Es gilt

$$S = \int_0^3 v(t) dt, \quad \text{wobei} \quad v(t) = \int_0^t a(s) ds + v(0).$$

(In unserem Fall ist die Anfangsgeschwindigkeit $v(0)$ gleich Null.) Für die Geschwindigkeit berechnen wir für $t \in [0, 1]$

$$v(t) = \int_0^t a(s) ds = \int_0^t \frac{2}{1+s} ds = 2 \ln |1+s| \Big|_0^t = 2 \ln(1+t).$$

Insbesondere erhalten wir $v_{\max} = v(1) = 2 \ln 2$. Die konstante negative Beschleunigung $a(t) = -\text{Const}$ für $t \in [1, 3]$ ist gegeben durch

$$v(1) + \int_1^3 a(t) dt = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\text{Const} = 2 \ln 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Const} = \ln 2.$$

Es folgt für $t \in [1, 3]$

$$v(t) = v(1) - \int_1^t \text{Const} ds = 2 \ln 2 - (t-1) \ln 2.$$

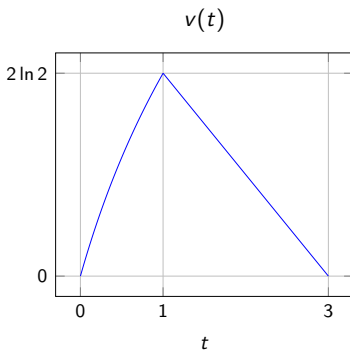
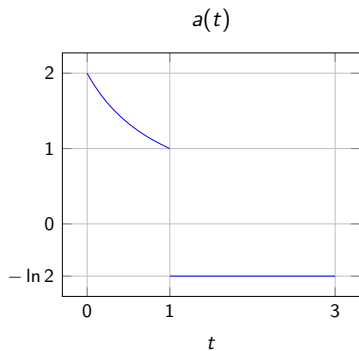


Abbildung: Illustration zum Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsverlauf

Für die zurückgelegte Strecke ergibt sich

$$S = \int_0^3 v(t) dt = \int_0^1 2 \ln(1+t) dt + \int_1^3 (2 \ln 2 - (t-1) \ln 2) dt.$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+t) dt &= t \ln(1+t) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt \\ &= \ln(2) - \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t} dt \\ &= \ln(2) - 1 + \ln|1+t| \Big|_0^1 \\ &= \ln(2) - 1 + \ln 2 = 2 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir

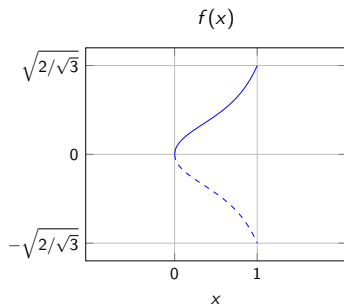
$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^1 \ln(1+t) dt + \ln 2 \int_1^3 3 - t dt. \\ &= 2(2 \ln 2 - 1) + 4 \ln 2 - \left(\frac{\ln 2}{2} (t-1)^2 \Big|_1^3 \right) \\ &= 4 \ln 2 - 2 + 4 \ln 2 - 2 \ln 2 = 6 \ln 2 - 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 6.8

Bond sitzt gelangweilt an der Bar des Casino Royale und betrachtet das seltsame Martiniglas, welches er soeben geleert hat. Sein geübtes Agentenauge schätzt die Höhe des Glases auf ca. 1 und er vermutet richtig, dass die Randkurve des (horizontal gehaltenen) Glases in etwa der Funktion

$$f(x) = \frac{\sqrt{\sin(\pi x/3)/3}}{\cos(\pi/3)}$$

zwischen $[0, 1]$ folgt. Wieviel Wodka-Martini passt in dieses Glas?



Lösung: Es gilt das Volumen des Rotationskörpers, welcher durch die Rotation des Funktionsgraphen von $f(x)$ auf $[0, 1]$ um die x -Achse entsteht, zu berechnen. Die Volumenformel dazu lautet

$$V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 \frac{\sin(\pi x/3)/3}{\cos^2(\pi x/3)} dx.$$

Substitution $y(x) = \cos(\pi x/3)$, $y'(x) = -\pi \sin(\pi x/3)/3$:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \frac{\sin(\pi x/3)/3}{\cos^2(\pi x/3)} dx \\ &= \pi \int_1^{1/2} \frac{\sin(\pi x/3)/3}{y^2} (-\pi \sin(\pi x/3)/3)^{-1} dy \\ &= - \int_1^{1/2} y^{-2} dy \\ &= \int_{1/2}^1 y^{-2} dy = -\frac{1}{y} \Big|_{1/2}^1 = -\frac{1}{1} + \frac{1}{1/2} = 1. \end{aligned}$$