

Lösungen zur Vorlesung Höhere Mathematik II

Prof. Dr. Peter Stollmann, Dr. Lutz Kämmerer,
Dr. Michael Quellmalz, Dr. Martin Tautenhahn,
Clemens Bombach, Masoumeh Hashemi,
Jean Daniel Mukam

TU Chemnitz

SS 2020

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Eine Teleskopsumme ist eine Summe der Form $\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k)$.

Für diese gilt $\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$.

Weisen Sie mit einer geeigneten Teleskopsumme nach, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

gilt, und bestimmen Sie damit den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Aufgabe 1

Lösung:

(a) Wir erkennen

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{-k + (k+1)}{k(k+1)} = -\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}.$$

Damit

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

(b) Es folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Aufgabe 2

Für die Partialsummenfolge (s_n) einer Folge (a_k) gelte $s_n = \frac{n+1}{2n+1}$.
Bestimmen Sie die Glieder (a_k) und sowie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Lösung:

(a) Für $n = 1$, wir haben $a_1 = s_1 = \frac{2}{3}$.

(b) Für $n > 1$ wir haben

$$\begin{aligned} a_n = s_n - s_{n-1} &= \frac{n+1}{2n+1} - \frac{n}{2n-1} \\ &= \frac{(n+1)(2n-1) - n(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} \\ &= \frac{2n^2 + n - 1 - 2n^2 - n}{4n^2 - 1} = -\frac{1}{4n^2 - 1}. \end{aligned}$$

(c) Damit folgt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Summen folgender Reihen

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7^k}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{4^{2k+3}}, \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^{k-1}}{3^{2k+1}}.$$

Wiederholung: Für eine geometrische Reihe es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{1}{1-q} \text{ für } |q| < 1.$$

Lösung:

(a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7} \left(\frac{1}{7}\right)^{k-1} = \frac{1}{7} \frac{1}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{6} = \frac{1}{6}.$$

(b)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{4^{2k+3}} &= \frac{1}{4^3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{4^2}\right)^k = \frac{1}{64} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{8} \left(\frac{1}{8}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{8} \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{7} = \frac{1}{448}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(c)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^{k-1}}{3^{2k+1}} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{8}{3^2}\right)^k = \frac{1}{24} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{9} \left(\frac{8}{9}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{24} \cdot \frac{8}{9} \frac{1}{1 - 8/9} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-5)^{k+1}}{(2a)^k}$.

Lösung: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-5)^{k+1}}{(2a)^k} = (-5) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-5}{2a}\right)^k.$$

Für Konvergenz muss gelten: $\left|\frac{-5}{2a}\right| < 1 \iff 5 < 2|a| \iff |a| > \frac{5}{2}.$

Aufgabe 5

Untersuchen Sie folgende Reihen mittels Quotientenkriterium auf Konvergenz.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-2}{3k+4} 3^k, \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}.$$

Wiederholung: Quotientenkriterium

Konvergiert die Quotientfolge $\left(\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \right)$ gegen einen Grenzwert α , so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

- (absolut) konvergent, wenn $\alpha < 1$
- divergent, wenn $\alpha > 1$.

Lösung:

(a)

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{\frac{k+1}{2^{k+1}}}{\frac{k}{2^k}} = \frac{k+1}{2 \cdot 2^k} \cdot \frac{2^k}{k} = \frac{k+1}{2k} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$$

$\implies$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ konvergiert.

Aufgabe 5

(b)

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 3 \frac{2k}{3k+7} 3^k \cdot \frac{3k+4}{(2k-2) \cdot 3^k} = 3 \frac{2k}{2k-2} \cdot \frac{3k+4}{3k+7} \rightarrow 3 > 1$$

$\Rightarrow$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-2}{3k+4} 3^k$ divergiert.

(c)

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{k+1}} = \sqrt[3]{\underbrace{\frac{k}{k+1}}_{\rightarrow 1}} \rightarrow 1.$$

Das liefert **keine** Aussage durch die Quotientenkriterium. Man braucht weiter Untersuchen.

Man erkennt dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/3}}$ ist eine harmonische

Reihe, mit $\alpha = 1/3 < 1$. Dann die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$ divergiert.

Aufgabe 6

Untersuchen Sie folgende Reihen mittels Wurzelkriterium auf Konvergenz.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+42}{2k+7} \right)^k.$$

Wiederholung: Wurzelkriterium

Konvergiert die Wurzelfolge $(\sqrt[k]{|a_k|})$ gegen einen Grenzwert α , so

ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

- ▶ (absolut) konvergent, wenn $\alpha < 1$
- ▶ divergent, wenn $\alpha > 1$.

Aufgabe 6

Lösung:

(a)

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{1}{k^k}} = \frac{1}{k} \longrightarrow 0 < 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} \text{ konvergiert.}$$

(b)

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left(\frac{k+42}{2k+7}\right)^k} = \frac{k+42}{2k+7} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$$

$$\implies \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+42}{2k+7}\right)^k \text{ konvergiert.}$$

Aufgabe 7

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz. Verwenden Sie geeignete Kriterien (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+7}{5k}$, (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}$,

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k}{7 + \frac{1}{k}}$, (d) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{5}{(k+2)^2}$, (e) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1}$.

Lösung:

(a)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k+7}{5k} = \frac{2}{5}.$$

Es folgt dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+7}{5k}$ divergiert, da notwendiges Konvergenzkriterium nicht erfüllt.

(b) **Quotientenkriterium:** $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k+2}{2k+1} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$. Es folgt dass die Reihe konvergiert.

Aufgabe 7

- (c) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3k}{7 + \frac{1}{k}} = \infty$. Es folgt dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k}{7 + \frac{1}{k}}$ divergiert, da notwendiges Konvergenzkriterium nicht erfüllt.
- (d) **Leibnizkriterium:** $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5}{(k+2)^2} = 0$. Dann $\frac{5}{(k+2)^2}$ ist eine monotone Nullfolge. Dann die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{5}{(k+2)^2}$ konvergiert.
- (e) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1$. Somit (a_k) keine Nullfolge. Es folgt: die Reihe divergiert, da notwendiges Konvergenzkriterium nicht erfüllt.

Aufgabe 8

Untersuchen Sie folgende Reihen mittels Majoranten- oder Minorantenkriterium auf Konvergenz.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 + k}, \quad (b) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k + \sqrt{k}}{k^3 - k}, \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1} \right).$$

Lösung:

(a) Es gilt $\frac{1}{4k^2+k} \leq \frac{1}{k^2}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert (harmonische Reihe). Nach Majorantenkriterium $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2+k}$ divergiert.

(b) Es gilt

$$\frac{k + \sqrt{k}}{k^3 - k} \leq \frac{2k}{k(k^2 - 1)} = \frac{2}{k^2 - 1} = \frac{2}{(k+1)(k-1)} \leq \frac{2}{(k-1)^2}.$$

Da die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(k-1)^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert (harmonische

Reihe), es folgt nach Majorantenkriterium dass $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{k^3-k}$ konvergiert.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{k} - \sqrt{k-1} &= \frac{(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} > \frac{1}{2\sqrt{k}}. \end{aligned}$$

Es folgt: die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$ divergiert nach

Minorantenkriterium, da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{k}}$ divergiert (harmonische Reihe).