

# Lösungen zur Vorlesung Höhere Mathematik II

Prof. Dr. Peter Stollmann, Dr. Lutz Kämmerner,  
Dr. Michael Quellmalz, Dr. Martin Tautenhahn,  
Clemens Bombach, Masoumeh Hashemi

TU Chemnitz

SS 2020

# Übungsblatt 3

## Aufgabe 1.1

Man bilde zu folgenden reellen Funktionen die Umkehrfunktion und zeichne die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion jeweils in ein und dasselbe Diagramm.

$$(a) f(x) = 1 + \ln x, \quad (b) f(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

**Wiederholung:** Sei  $f : A \rightarrow B$  eine Funktion.

- ▶  $f$  heißt **surjektiv**, falls die Gleichung  $f(x) = y$  für jedes  $y \in B$  mindestens eine Lösung  $x \in A$  besitzt, d.h.

$$\forall y \in B \exists x \in A : y = f(x)$$

- ▶  $f$  heißt **injektiv**, falls die Gleichung  $f(x) = y$  für jedes  $y \in B$  höchstens eine Lösung  $x \in A$  besitzt, d.h.

$$\forall x_1, x_2 \in A : y = f(x_1) = f(x_2)$$

- ▶  $f$  heißt **bijektiv**, falls  $f$  surjektiv and injektiv ist.

**Lösung:** Allgemeine Vorgehensweise:

- ▶ Die Funktionsgleichung  $y = f(x)$  lösen wir nach der Variablen  $x$  auf.
- ▶ Im Anschluss vertauschen wir  $x$  und  $y$ .

(a) Aus  $y = f(x) = 1 + \ln x$  folgt

$$y = 1 + \ln x \Leftrightarrow \ln x = y - 1 \Leftrightarrow y = \exp(x - 1)$$

$$\text{also } f^{-1}(x) = e^{x-1}$$

(b) Beachte:  $x = 1$  nicht definiert. Aus  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  folgt

$$y(x - 1) = x + 1 \iff -y - 1 = x(1 - y) \iff x = \frac{y + 1}{y - 1},$$

$$\text{also } f^{-1}(x) = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

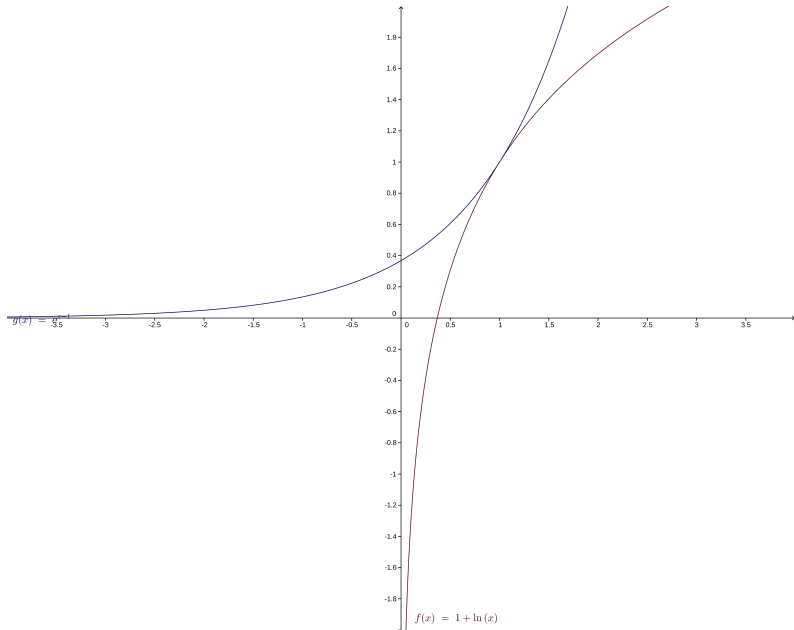
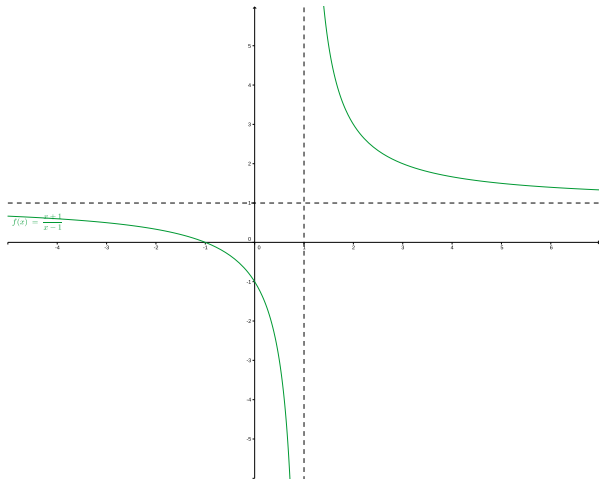


Figure:  $f(x) = 1 + \ln(x)$ ,  $f^{-1}(x) = \exp^{x-1}$



## Aufgabe 1.2

Zeichnen Sie den Graphen von  $f(x) = 2 \sin \frac{x}{2}$ . Wie ändert sich der Graph einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x)$  beim Übergang zu

(a)  $x \mapsto f(kx)$ ,      (b)  $x \mapsto kf(x)$ ?

Unterscheiden Sie dabei die Fälle  $k > 0$  und  $k < 0$ .

### Lösung:

(a)  $x \mapsto f(kx)$ : Streckung bzw. Stauchung (in  $x$ -Richtung) für  $0 \leq |k| \leq 1$  bzw.  $1 \leq |k|$ .

Für  $k < 0$  kommt Spiegelung an  $y$ -Achse hinzu.

(b)  $x \mapsto kf(x)$ : Streckung bzw. Stauchung der Amplitude (also in  $y$ -Richtung) für  $0 \leq |k| \leq 1$  bzw.  $1 \leq |k|$ .

Für  $k < 0$  kommt Spiegelung an  $x$ -Achse hinzu.

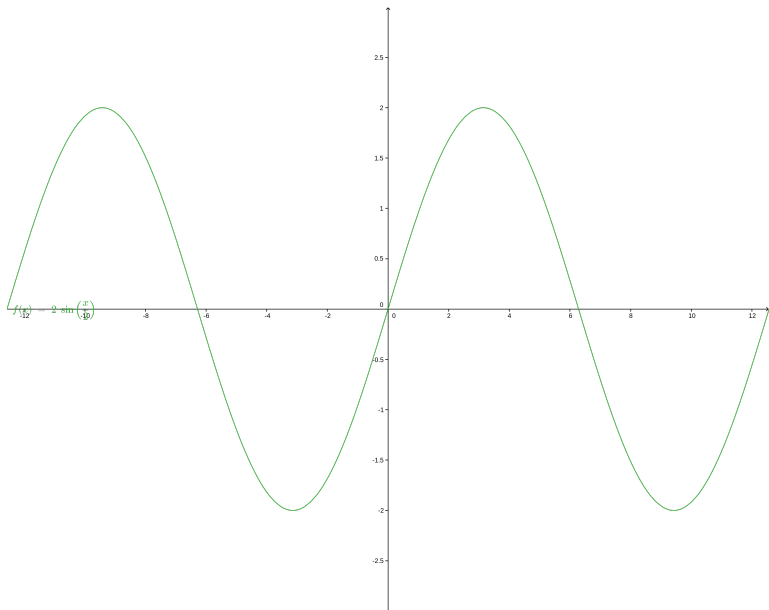


Figure:  $f(x) = 2 \sin(x/2)$

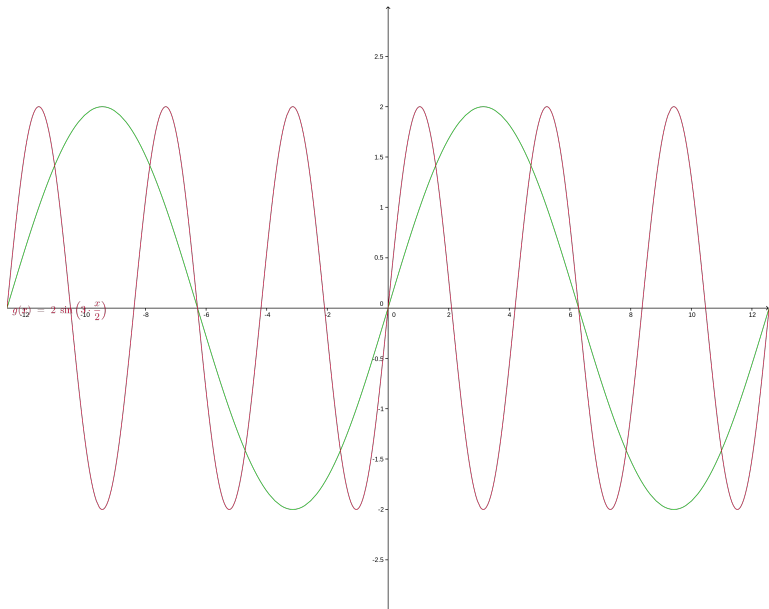


Figure:  $g(x) = 2 \sin(3x/2)$ ,  $k = 3$

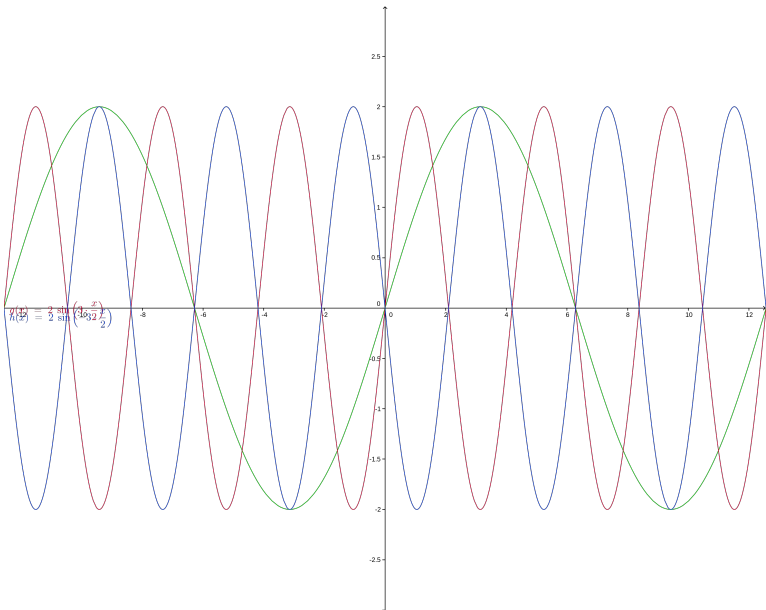


Figure:  $h(x) = 2 \sin(-3x/2)$ ,  $k = -3$

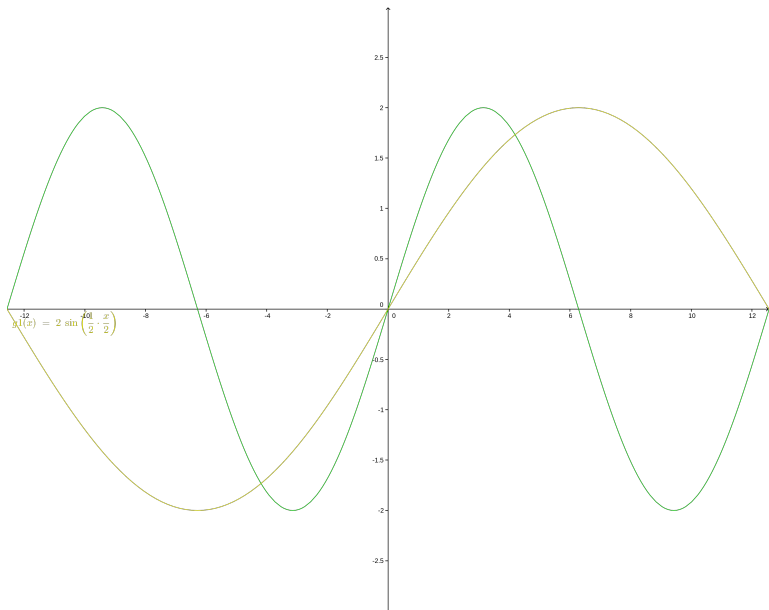


Figure:  $g_1(x) = 2 \sin(x/4)$ ,  $/k = 1/2$

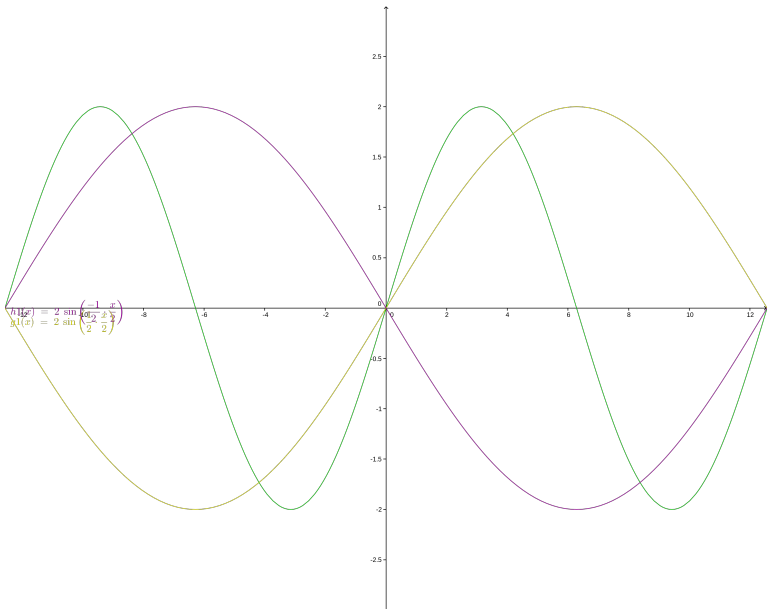


Figure:  $g_1(x) = 2 \sin(-x/4)$ ,  $/k = -1/2$

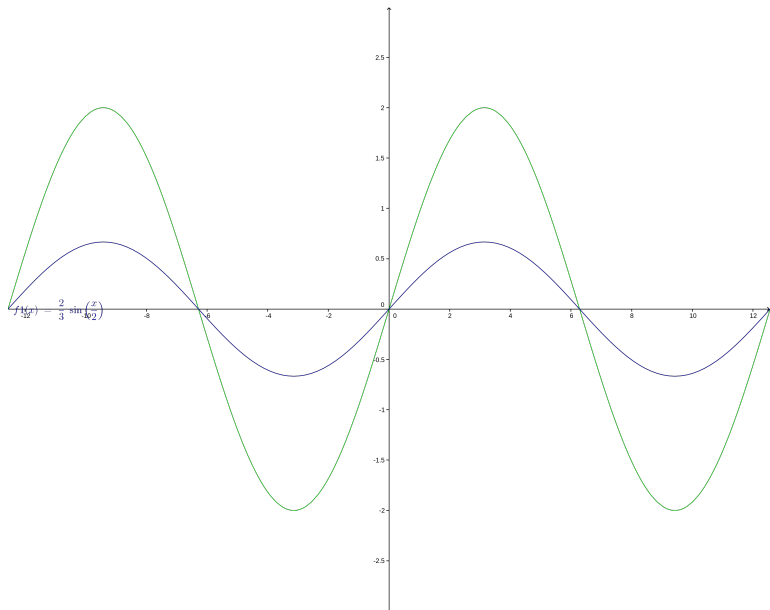


Figure:  $f_1(x) = \frac{2}{3} \sin(x/2)$ ,  $k = 1/3$

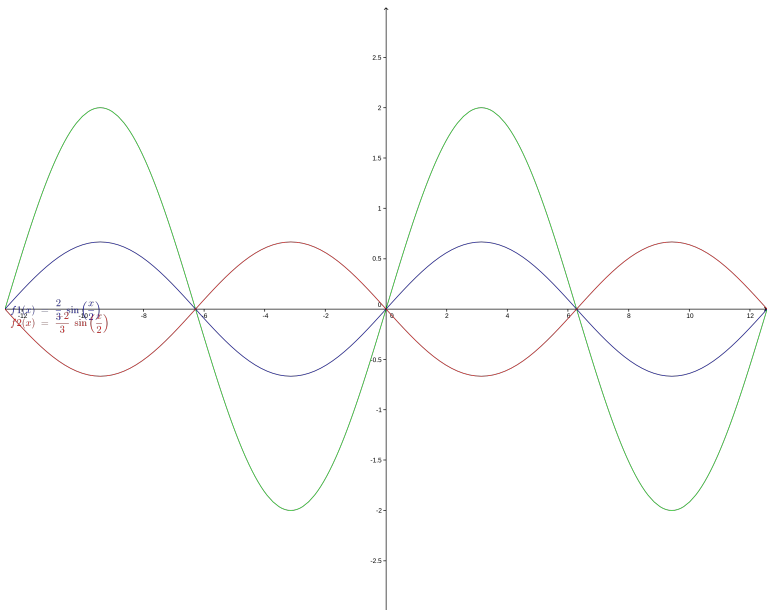


Figure:  $f_2(x) = -2/3 \sin(x/2)$ ,  $k = -1/3$

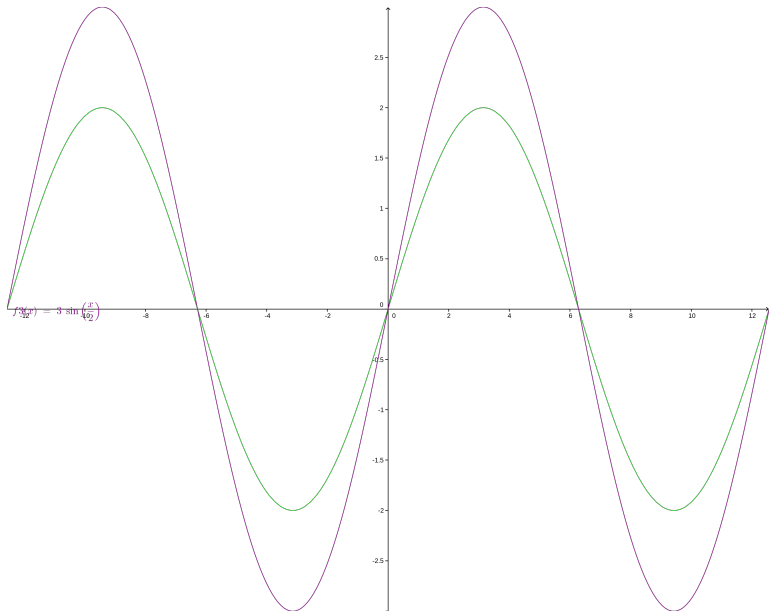


Figure:  $f_3(x) = 3 \sin(x/2)$ ,  $/k = 3/2$

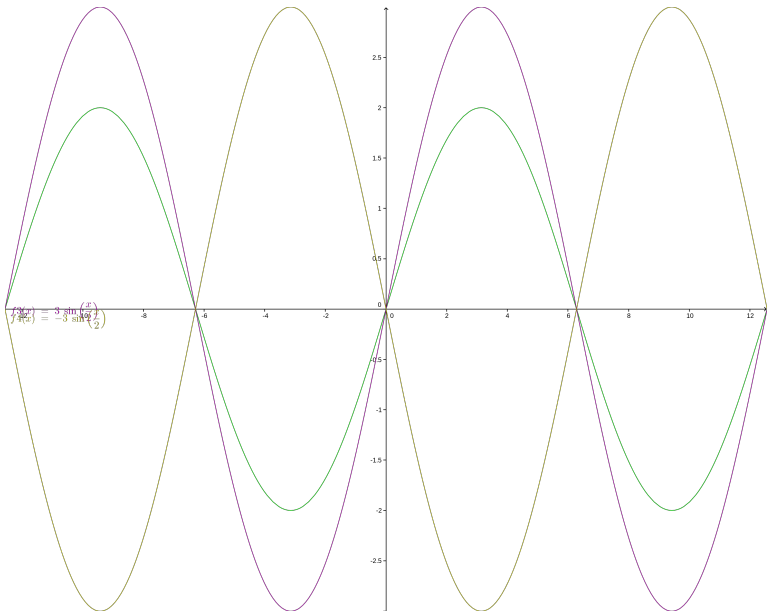


Figure:  $f_4(x) = -3 \sin(x/2)$ ,  $/k = -3/2$

### Aufgabe 1.3

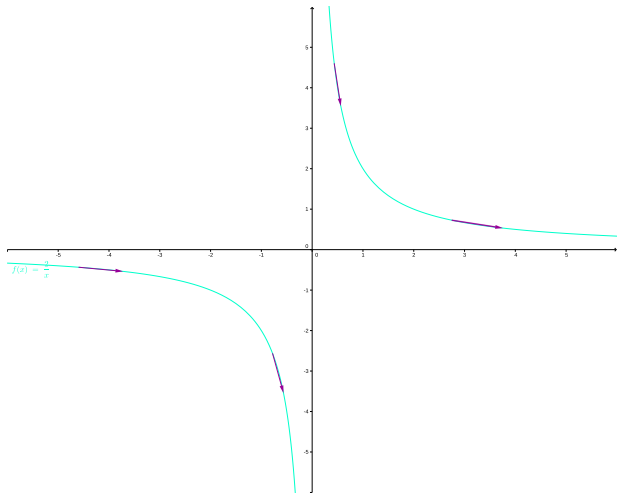
*Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der folgenden reellen Funktionen und geben Sie jeweils den Wertebereich an. Sind die angegebenen Funktionen beschränkt?*

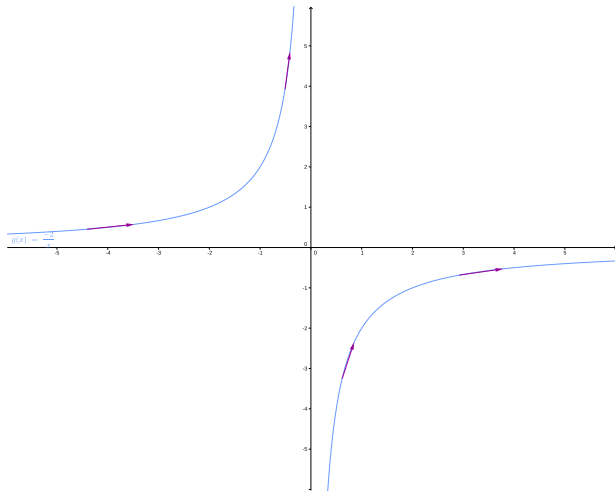
$$(a) f(x) = \frac{a}{x}, \quad a \neq 0, \quad (b) f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 10}, \quad (c) \\ f(x) = \arctan\left(\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2}\right), \quad x > 0.$$

(a) Für  $a > 0$  ist  $f(x)$  streng monoton fallend auf  $(-\infty, 0)$  und  $(0, \infty)$  - aber nicht auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Für  $a < 0$  ist  $f(x)$  streng monoton wachsend auf  $(-\infty, 0)$  und  $(0, \infty)$  - aber nicht auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ! Nachweis wie oben, evtl. zusätzlich Skizze.

Wertebereich jeweils  $W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .





- (b) Es gilt  $f(x) = \frac{1}{x^2-6x+10} = \frac{1}{(x-3)^2+1}$ . Da  $(x-3)^2+1$  streng monoton fallend auf  $(-\infty, 3]$  und streng monoton wachsend auf  $[3, \infty)$  ist gilt es für  $f$  genau umgedreht:

$f$  streng monoton wachsend für  $x \leq 3$  und streng monoton fallend für  $x \geq 3$ .

Der Wertebereich ist  $W_f = (0, 1]$ .

- (c)  $\arctan x$  ist streng monoton wachsend auf  $\mathbb{R}$ . Betrachten also

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2} = 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Für  $x > 0$  ist dies streng monoton fallend. Also ist  $f$  streng monoton fallend.

Der Wertebereich ist  $(\arctan 2, \pi/2)$ .

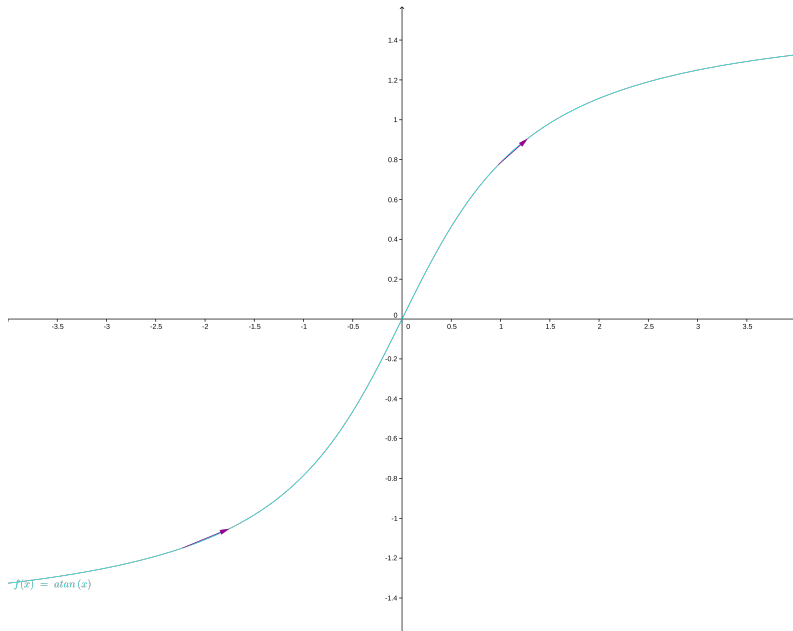


Figure:  $f(x) = \arctan(x)$

## Aufgabe 1.4

- (a) Sind die angegebenen reellen Funktionen gerade bzw. ungerade?

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^{-x}, & f_2(x) &= x^5 + 7x, & f_3(x) &= x \sin x, \\ f_4(x) &= x(e^x + e^{-x}). \end{aligned}$$

- (b) Sind folgende Funktionen periodisch? Geben Sie, falls möglich, die primitive Periode an.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \cos(2 - \pi x), & f_2(x) &= -e^{\cos 4x}, \\ f_3(x) &= \sin x + \cos \pi x, & f_4(x) &= \ln(2 \sin^2 x + 1). \end{aligned}$$

## Lösung

- (a) **Wiederholung:** Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion mit dem Definitionsbereich  $D \subset \mathbb{R}$ .

- ▶ Die Funktion  $f$  heißt **gerade**, wenn für alle  $x \in D$  gilt:  
 $f(x) = f(-x)$ .
- ▶ Eine Funktion  $f$  heißt **ungerade**, wenn für alle  $x \in D$  gilt:  
 $f(x) = -f(-x)$ .

1. Weder noch, da

$$f(-x) = e^{-x} \neq e^x = f(x)$$

und

$$f(-x) = e^{-x} \neq -e^x = -f(x).$$

2. Ungerade, da

$$f(-x) = (-x)^5 + 7(-x) = -(x^5 + 7x) = -f(x).$$

3. Gerade, da

$$f(-x) = (-x) \sin(-x) = x \sin(x) = f(x).$$

4. Ungerade, da

$$f(-x) = (-x)(e^{-x} + e^x) = -(x(e^x + e^{-x})) = -f(x).$$

- (b) **Wiederholung:** Periodische Funktion:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **periodisch**, falls ein  $k > 0$  existiert, so dass  $f(x + k) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . **Primitive Periode**  $p$  ist, falls existierend, kleinstes solches  $k$ , also

$$p = \min\{k > 0 : f(x + k) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

- (1) Periodisch mit primitiver Periode  $p = 2$ :  $\cos$  hat die primitive Periode  $2\pi$ , d.h., es gilt

$$\cos(2 - \pi x) = \cos((2 - \pi x) + 2\pi) = \cos(2 - \pi(x - 2)).$$

- (2) Periodisch mit primitiver Periode  $p = \frac{\pi}{2}$ : es gilt wieder mit der primitiven Periode  $2\pi$  von  $\cos$ , dass

$$\cos(4x) = \cos(4x + 2\pi) = \cos(4(x + 0.5\pi)),$$

was zu  $f(\cos(4x)) = f(\cos(4(x + 0.5\pi)))$  führt.

- (3) Nichtperiodisch, da  $\sin x$  periodisch mit  $p_1 = 2\pi$  und  $\cos \pi x$  periodisch mit  $p_2 = 2$ , aber es existieren keine  $n, m \in \mathbb{N}$ , so dass  $2n\pi = 2m$ .
- (4) Periodisch mit  $p = \pi$ : die Funktion  $\sin^2(x)$  hat die primitive Periode  $\pi$ , damit folgt das Resultat analog zu oben.

## Aufgabe 1.5

*Zeigen Sie, dass für gerade Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auch alle Funktionen vom Typ  $f + \lambda g$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  wieder gerade sind. Was lässt sich damit über die Summe und Differenz von  $f$  und  $g$  sagen?*

**Lösung:** Es seien  $f$  und  $g$  gerade, d.h., es gilt  $f(x) = f(-x)$  und  $g(x) = g(-x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Es sei weiterhin  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Wir definieren  $h(x) := f(x) + \lambda g(x)$  und erhalten für  $x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = f(-x) + \lambda g(-x) = f(x) + \lambda g(x) = h(x).$$

Also ist  $h = f + \lambda g$  ebenfalls eine gerade Funktion. Daraus folgt: Summen und Differenzen von geraden Funktionen sind wieder gerade.

## Aufgabe 1.6

Gegeben ist die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}, & \text{für } |x| \neq 1; \\ 0, & \text{für } |x| = 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie, sofern existent, die Grenzwerte

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \\ &\lim_{x \rightarrow -1+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -1-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x). \end{aligned}$$

Was lässt sich damit über die Stetigkeit von  $f$  sagen?

**Lösung:** Es gilt

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x - 1}{x + 1}.$$

Damit folgt

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} f(1 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} = \frac{0}{2} = 0.$$

Oder abgekürzt:

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

(2) Analog:

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} f(1 - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} -\frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon} = -\frac{0}{2} = 0.$$

Oder abgekürzt:

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

(3) Da  $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0$  folgt  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ .

$$(4) \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} f(-1 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\varepsilon - 2}{\varepsilon} = \frac{-2}{0} = -\infty.$$

Oder abgekürzt:

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{-2}{0} = -\infty.$$

(5) Analog:

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} f(-1 - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{-\varepsilon - 2}{-\varepsilon} = \frac{2}{0} = +\infty.$$

Oder abgekürzt:

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{2}{0} = +\infty.$$

(6) Da  $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)$  existiert  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  nicht.

## Aufgabe 1.7

*In welchen Punkten sind folgende Funktionen stetig? Untersuchen Sie insbesondere die Grenzwerte für  $x \rightarrow 0$  und  $x \rightarrow 1$  und skizzieren Sie auch die zugehörigen Graphen.*

$$(a) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{für } 0 \leq x \leq 1; \\ x, & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0; \\ \frac{1}{4}x^2, & \text{für } 0 < x \leq 1; \\ 1, & \text{für } x > 1. \end{cases} ,$$

## Lösung:

- (a) Einzige mögliche Unstetigkeitsstelle ist  $x = 1$ . Linksseitiger Grenzwert ist  $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) = 1$ . Für rechtsseitigen Grenzwert gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} x = 1.$$

Also ist  $f$  überall stetig.

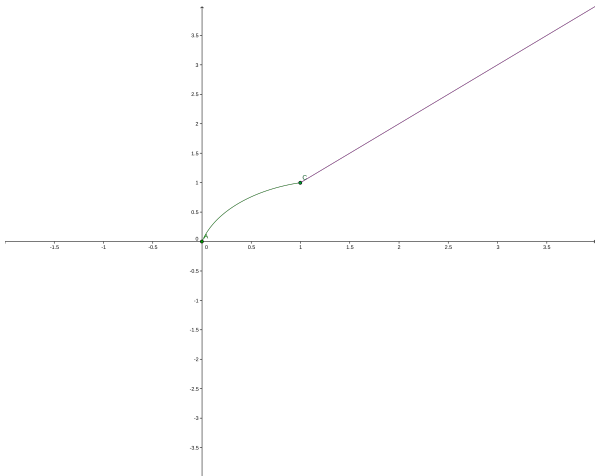
- (b) Mögliche Unstetigkeitsstelle sind  $x = 0$  und  $x = 1$ . Es gilt  $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0) = 0$  und

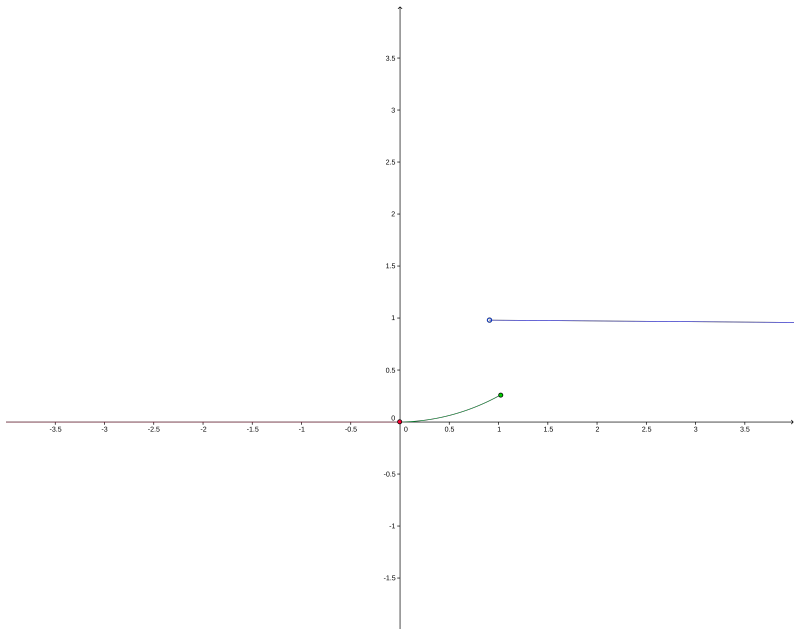
$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{4}x^2 = 0.$$

Weiterhin gilt  $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) = \frac{1}{4}$  und

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} 1 = 1.$$

Damit ist  $f$  in  $x = 1$  unstetig und sonst überall stetig.





## Aufgabe 1.8

Wie müssen die Konstanten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gewählt werden, damit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x, & \text{für } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \alpha \sin x + \beta, & \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{für } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

überall stetig ist?

**Lösung:** Mögliche Unstetigkeiten nur in  $\pm\frac{\pi}{2}$ . Wähle  $\alpha, \beta$  so, dass rechts- bzw. linksseitiger Grenzwerte mit Funktionswert übereinstimmt:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+} f(x) \stackrel{!}{=} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} f(x) \stackrel{!}{=} f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Also:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+} \alpha \sin x + \beta = \alpha \sin -\frac{\pi}{2} + \beta = -\alpha + \beta \stackrel{!}{=} -2 \sin -\frac{\pi}{2} = 2.$$

und

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \alpha \sin x + \beta = \alpha \sin \frac{\pi}{2} + \beta = \alpha + \beta \stackrel{!}{=} \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Folglich ist

$$\alpha - \beta = -2, \quad \alpha + \beta = 0,$$

zu lösen. Z. B. mit  $\alpha = -\beta$  einsetzen in erste Gleichung:  
 $-2\beta = -2$ . Es folgt  $\beta = 1$  und  $\alpha = -1$ .