

# Lösungen zur Vorlesung Höhere Mathematik II

Prof. Dr. Peter Stollmann, Dr. Lutz Kämmerer,  
Dr. Michael Quellmalz, Dr. Martin Tautenhahn,  
Clemens Bombach, Masoumeh Hashemi,  
Jean Daniel Mukam

TU Chemnitz

SS 2020

Übungsblatt 4

## Aufgabe 4.1

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen an der Stelle  $x_0 = 0$  auf Differenzierbarkeit.

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

**Wiederholung:** Sei  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  eine reellwertige Funktion und  $x_0 \in D_f$  innerer Punkt von  $D_f$ .

Dann heißt  $f$  differenzierbar an der Stelle  $x_0$ , wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.

## Aufgabe 4.1

### Lösung:

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

- Wir betrachten den Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle  $x_0 = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir:  $\lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$  existiert nicht (Folie 101). Folglich ist  $f$  in 0 nicht differenzierbar.

## Aufgabe 4.1

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

- Wir verfahren analog und erhalten für  $x_0 = 0$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h}.$$

- (WH: Produkt aus beschränkter und Nullfolge). Damit ist  $f$  in  $x_0 = 0$  differenzierbar und es gilt  $f'(0) = 0$ .

## Aufgabe 4.2

Ist die Funktion  $f(x) = a|x|x^4$  mit  $a \in \mathbb{R}$  überall differenzierbar?  
(Hinweis: wie vorherige Aufgabe.)

**Lösung:**

- Einzige problematische Stelle ist  $x_0 = 0$ . Argumentation über Differenzenquotienten liefert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a|h|h^4 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a|h|h^3 = 0.$$

Also ist  $f$  überall differenzierbar

## Aufgabe 4.3

Bestimmen Sie alle Konstanten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , so dass die folgende Funktion auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar ist:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & x < 0, \\ \beta x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

### Lösung:

- Wie müssen  $\alpha, \beta$  gewählt sein, damit  $f$  stetig?

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \alpha x = 0. \quad \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \beta x^2 = 0.$$

Also  $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0) = 0$ .

Dann für beliebige  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $f$  ist stetig.

- Einzige problematische Stelle für Differenzierbarkeit ist  $x_0 = 0$ . Links- und rechtsseitiger Grenzwert für Differenzenquotienten müssen gleich sein:

$$\lim_{h \rightarrow 0+} -\frac{f(0-h) - f(0)}{h} \stackrel{!}{=} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$

## Aufgabe 4.3

- Es gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0+} -\frac{f(0-h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} -\frac{-\alpha h - 0}{h} = \alpha$$

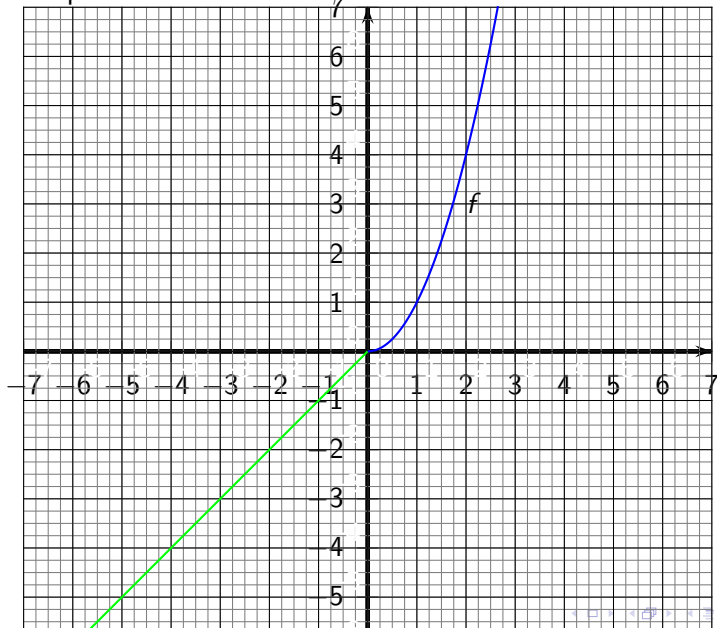
- und

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\beta h^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \beta h = 0.$$

- Also muss  $\alpha = 0$  und  $\beta \in \mathbb{R}$  gelten, damit  $f$  überall differenzierbar ist.

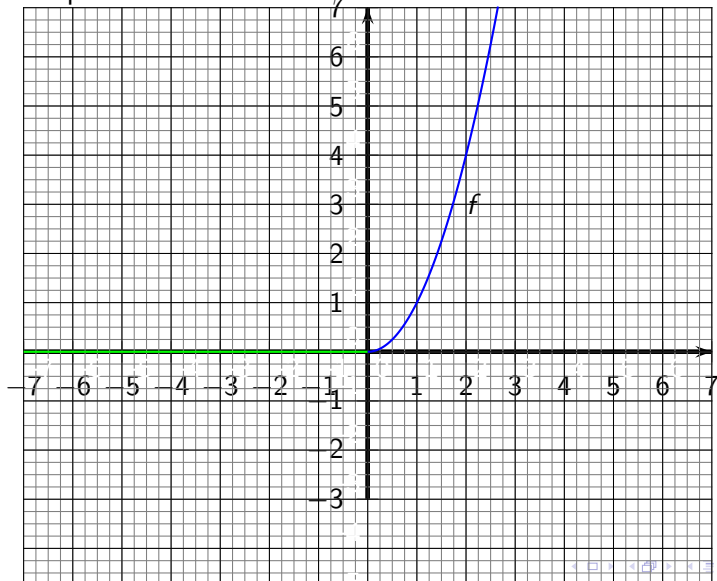
## Aufgabe 4.3

Graphisch für  $\alpha = 1$  und  $\beta = 1$



## Aufgabe 4.3

Graphisch für  $\alpha = 0$  und  $\beta = 1$



## Aufgabe 4.4

(a) Lasst uns bestimmen die Gleichung der Tangente  $t$  an den Graphen von  $f(x) = \ln x$  an der Stelle  $x = 2$ .

- $f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ .
- Anstieg  $m$  der Tangente  $t(x) = a + mx$  gegeben durch Ableitung in  $x = 2$ :  $m = f'(2) = \frac{1}{2}$ .
- Also  $t(x) = a + \frac{1}{2}x$ .
- Es bleibt  $a$  zu berechnen mittels  $a$ . An der Stelle  $x = 2$  muss gelten  $t(2) = f(2)$ :

$$t(2) \stackrel{!}{=} f(2) \iff a + \frac{1}{2} \cdot 2 = \ln 2 \iff a = \ln 2 - 1.$$

Damit folgt  $t(x) = \ln 2 - 1 + \frac{1}{2}x = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2)$ .

## Aufgabe 4.4

- (b) An welchen Stellen verläuft die Tangente an den Graphen von  $g(x) = x^2$  parallel bzw. senkrecht zur Tangenten  $t$  aus Aufgabenstellung (a)?

Hinweis: Die Graphen zweier linearer Funktionen  $h_i(x) = m_i x + c_i$ ,  $i = 1, 2$ , stehen senkrecht aufeinander, wenn für deren Anstiege die Beziehung  $m_2 = -\frac{1}{m_1}$  gilt.

### Lösung:

- ▶ Fall: parallel.
  - Anstiege der Tangenten müssen gleich sein. Wir suchen also  $x$ , so dass  $g'(x) = f'(2) = \frac{1}{2}$ .
  - Es gilt  $g'(x) = 2x$ .
  - Also

$$g'(x) = f'(2) \iff 2x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{4}.$$

- Also ist die Tangente an  $g$  in  $\boxed{x = \frac{1}{4}}$  parallel zur Tangente  $t$  aus Aufgabe a).

## Aufgabe 4.4

► Fall: senkrecht.

- Aus Hinweis wissen wir: wir suchen  $x$  mit  $g'(x) = -\frac{1}{f'(2)} = 2$ .
- Aus  $g'(x) = 2x$  folgt

$$g'(x) = -2 \iff 2x = -2 \iff x = -1.$$

- Also ist die Tangente an  $g$  in  $\boxed{x = -1}$  senkrecht zur Tangente  $t$  aus Aufgabe a).

## Wiederholung

- $(x^n)' = nx^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{Q}$ .
- Für  $a > 0$ ,  $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$ . Dann  
 $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = a^x \cdot \ln a$ .
- $(\sin x)' = \cos x$ .
- $(\cos x)' = -\sin x$ ,
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ .

# Wiederholung

Seien  $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ . Dann

- $(f + g)(x)' = f'(x) + g'(x), x \in D.$
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), x \in D.$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, x \in D, g(x) \neq 0.$

## Aufgabe 4.5

(a)  $f(x) = \frac{42}{x} = 42x^{-1}$ . Es folgt  $f'(x) = -42x^{-2} = -\frac{42}{x^2}$ .

(b)  $f(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{5/2}} = x^{-5/2}$ . Es folgt  
 $f'(x) = -\frac{5}{2}x^{-7/2} = -\frac{5}{2x^3\sqrt{x}}.$

(c)  $f(x) = x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 42$  und es folgt  
 $f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 10x - 3.$

- Schwerpunkt: Differentiationsregeln für Potenzen von  $x$  bzw. Ableiten von Polynomen.

## Aufgabe 4.6

(a)  $f(x) = (2x^2 + 4x)(3x^3 - 2x^2 + 3x)$ . Nach Produktregel folgt:

$$f'(x) = (4x + 4)(3x^3 - 2x^2 + 3x) + (2x^2 + 4x)(9x^2 - 4x + 3).$$

(b)  $f(x) = (4ax^2 + x)\sqrt{x^3}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Nach Produktregel folgt:

$$f'(x) = (8ax + 1)\sqrt{x^3} + (4ax^2 + x)\frac{3}{2}\sqrt{x} = \sqrt{x}(14ax^2 + \frac{5}{2}x).$$

(c)  $f(x) = x^n a^x$ ,  $a > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

$$f'(x) = nx^{n-1}a^x + x^n a^x \ln a = x^{n-1}a^x(n + x \ln a).$$

- Schwerpunkt: Produktregel.

## Aufgabe 4.7

(a)  $f(x) = \frac{2 \sin x + \cos x}{x^2}$ . Mit Quotientenregel folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2 \cos x - \sin x)x^2 - 2x(2 \sin x + \cos x)}{x^4} \\ &= \frac{x(2 \cos x - \sin x) - 2(2 \sin x + \cos x)}{x^3}. \end{aligned}$$

(b)  $f(x) = \frac{e^x + \ln x}{\sin x}$ . Wieder mit Quotientenregel folgt

$$f'(x) = \frac{(e^x + \frac{1}{x}) \sin x - (e^x + \ln x) \cos x}{\sin^2 x}.$$

(c)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$ .

$$f'(x) = \frac{2x(x - 3) - (x^2 + 1)}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x - 1}{(x - 3)^2}.$$

- Schwerpunkt: Quotientenregel.

## Aufgabe 4.8

(a)  $f(x) = \sin(x^2)$ . Mit Kettenregel folgt

$$f'(x) = 2x \cos(x^2).$$

(b)  $f(x) = \sqrt{(x^2 + 4x)^3}$ . Wieder mit Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(2x + 4)(x^2 + 4x)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{(x^2 + 4x)^3}} \\ &= (3x + 6)\sqrt{x^2 + 4x}. \end{aligned}$$

(c)  $f(x) = \ln(\tan x)$ . Wieder mit Kettenregel folgt

$$f'(x) = \frac{1}{\tan x} (1 + \tan^2 x) = \cot x + \tan x.$$

- Schwerpunkt: Kettenregel.

## Aufgabe 4.9

(a) Für  $x > 0$ , es folgt

$f(x) = (2x)^{\sin x} = \exp(\ln[(2x)^{\sin x}]) = \exp(\ln(2x) \sin x)$ . Mit Ketten- und Produktregel es folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln(2x) \sin x)' \exp(\ln(2x) \sin x) \\ &= [(\ln(2x))' \sin x + (\sin x)' \ln(2x)] \exp(\ln(2x) \sin x) \\ &= \left( \frac{1}{x} \sin x + \ln(2x) \cos x \right) \exp(\ln(2x) \sin x). \end{aligned}$$

(b) Für  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , es folgt  $f(x) = \sqrt{x}^{\tan x} = x^{\frac{1}{2} \tan x} =$

$$\exp\left(\ln\left(x^{\frac{1}{2} \tan x}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \tan x \ln x\right).$$

Mit Ketten- und Produktregel es folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{x}^{\tan x} \left( \frac{1}{2x} \tan x + \frac{1}{2} \ln(x) \frac{1}{\cos^2 x} \right) \\ &= \frac{1}{2} x^{\frac{\tan x}{2}} \left( \frac{\tan x}{x} + \frac{\ln x}{\cos^2 x} \right). \end{aligned}$$

Schwerpunkt: Exponentialtrick bzw. logarithmisches Differenzieren

## Aufgabe 4.10

Wie lautet die  $k$ -te Ableitung von

$$(a) \ f(x) = e^{ax}, \ a \in \mathbb{R}, \quad (b) \ f(x) = xe^x? \quad (1)$$

**Lösung:**

(a)  $k$ -te Ableitung von  $f(x) = e^{ax}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = ae^{ax}, \quad f''(x) = a^2e^{ax}, \quad f^{(3)}(x) = a^3e^{ax}, \\ f^{(4)}(x) = a^4e^{ax}, \dots, \quad \boxed{f^{(k)}(x) = a^ke^{ax}}.$$

(b)  $k$ -te Ableitung von  $f(x) = xe^x$

$$f'(x) = (x+1)e^x, \quad f''(x) = (x+2)e^x, \\ f^{(3)}(x) = (x+3)e^x, \quad f^{(4)}(x) = (x+4)e^x, \dots \\ \boxed{f^{(k)}(x) = (x+k)e^x}.$$

## Aufgabe 4.11

Bestätigen Sie  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$  mit Hilfe des Satzes über die Umkehrfunktion.

**Wiederholung:**  $(f^{-1}(x))' = (f'(f^{-1}(x)))^{-1}$ , oder kurz  $(f^{-1})' = (f' \circ f^{-1})^{-1}$ .

**Lösung:** Da  $\arctan x$  Umkehrfunktion von  $\tan x$  ist und  $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ , folgt

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$