

# Lösungen zur Vorlesung Höhere Mathematik II

Prof. Dr. Peter Stollmann, Dr. Lutz Kämmerner,  
Dr. Michael Quellmalz, Dr. Martin Tautenhahn,  
Clemens Bombach, Masoumeh Hashemi

TU Chemnitz

SS 2020

# Übungsblatt 5

## Aufgabe 1.1

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema der folgenden Funktionen.

(a)  $f : (0, 10] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3x-2}{x},$

(b)  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}.$

Lösung:

(a)  $f(x) = 3 - \frac{2}{x}$  führt auf  $f'(x) = \frac{2}{x^2} > 0.$

Also ist  $f$  monoton wachsend. Ein Minimum existiert damit nicht auf  $D_f = (0, 10]$ , da insbesondere  $\lim_{x \rightarrow 0+} = -\infty.$

Das globale Maximum wird bei  $x = 10$  erreicht ( $f(10) = 14/5$ ).

(b)  $g(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$  führt zu  $g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$  und  $g''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ .

Es folgt  $g'(x) = 0$  für  $x = 1$  mit  $g''(1) = 2 > 0$ . Also ist in  $x = 1$  ein lokales Minimum.

Weiterhin erhalten wir  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 + 2 + \infty = +\infty$  und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty + 2 + 0 = +\infty$ .

Damit hat  $g$  in  $x = 1$  auch globales Minimum. Ein lokales/globales Maximum existiert nicht.

## Aufgabe 1.2

*Führen Sie für folgende Funktionen eine Kurvendiskussion (Null- und Polstellen, lokale Extrema, Wendepunkte, Verhalten im Unendlichen bzw. am Rand) durch.*

(a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1},$

(b)  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1},$

(c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 e^{-x^2},$

(d)  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x(\ln x)^2.$

(a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

► **Ableitungen:**  $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$  und  $f''(x) = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$  und  $f'''(x) = \frac{-6x^4+36x^2-6}{(x^2+1)^4}$

► **Nullstellen:**  $f(x) = 0$  in  $x = 0$ .

► **Polstellen:** Keine Polstellen.

► **Lokale Extrema:**  $f'(x) = 0$  in  $x = 1$  und  $x = -1$ .

$f''(1) = -\frac{1}{2} < 0$  und  $f''(-1) = \frac{1}{2} > 0$ .

Damit lokales Maximum in  $(1, \frac{1}{2})$  und lokales Minimum in  $(-1, -\frac{1}{2})$ .

► **Wendepunkte:**  $f''(x) = 0 \iff 2x^3 - 6x = 0$  in  $x = 0$  und  $x = \pm\sqrt{3}$ .

$f'''(0) = -6 \neq 0, f'''(\sqrt{3}) = f'''(-\sqrt{3}) = \frac{48}{4^4} \neq 0$

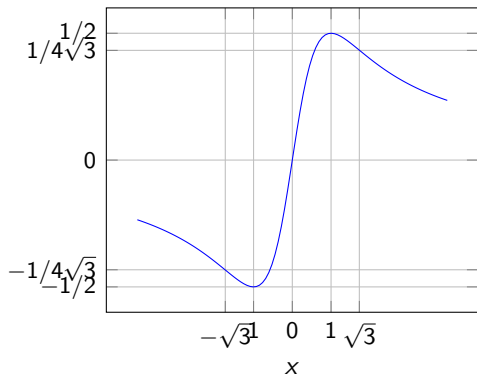
Damit Wendepunkte in  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{3}, \frac{1}{4}\sqrt{3})$  und  $(-\sqrt{3}, -\frac{1}{4}\sqrt{3})$ .

► **Verhalten im Unendlichen:**

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

Damit sind lokale Extrema auch globale Extrema.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$



(b)  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1},$

► **Ableitungen:**  $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$  und  $f''(x) = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$  (und  $f'''(x) = -24 \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^4}$ )

► **Nullstellen:**  $f(x) = 0 \iff x^2 + 1 = 0$ , aber  $x^2 + 1 > 0$ . Es gibt also keine Nullstellen.

► **Polstellen:** in  $x = 1$  und  $x = -1$

► **Lokale Extrema:**  $f'(x) = 0$  in  $x = 0$ .  $f''(0) = -4 < 0$ .  
Damit lokales Maximum in  $(0, -1)$ .

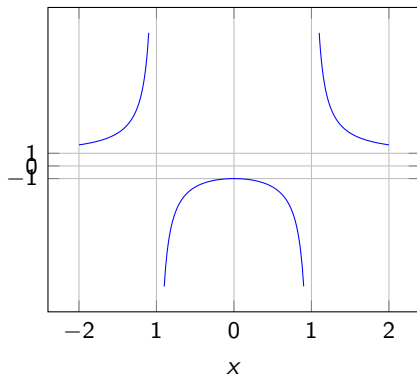
► **Wendepunkte:**  $f''(x) = 0 \iff 12x^2 + 4 > 0$ , also keine Wendepunkte.

► **Verhalten im Unendlichen:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$



$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$



(c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 e^{-x^2},$

► **Ableitungen:**  $f'(x) = (2x - 2x^3)e^{-x^2}$  und  
 $f''(x) = (4x^4 - 10x^2 + 2)e^{-x^2}$  und  
 $f'''(x) = -(8x^5 - 36x^3 + 24x)e^{-x^2}$

► **Nullstellen:**  $f(x) = 0$  in  $x = 0$ .

► **Polstellen:** Keine Polstellen.

► **Lokale Extrema:**  $f'(x) = 0 \iff 2x - 2x^3 = x(2 - 2x^2) = 0$   
in  $x = 0, x = \pm 1$ .

$f''(0) = 2 > 0$  (lokales Minimum) .

$f''(1) = -\frac{4}{e} < 0$  (lokales Maximum)

$f''(-1) = -\frac{4}{e} < 0$  (lokales Maximum)

Also lokales Maximum in  $(-1, 1/e)$  und  $(1, 1/e)$  und lokales Minimum in  $(0, 0)$ .

- **Wendepunkte:**  $f''(x) = 0 \iff 4x^4 - 10x^2 + 2 = 0$ , lösen der biquadratischen Gleichung liefert Wendepunkte in

$$x = \pm \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}} \text{ und } x = \pm \sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}.$$

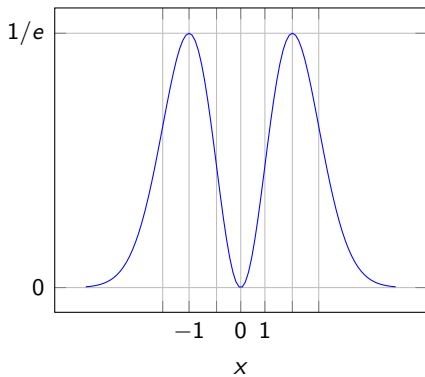
Denn Nullstellen der dritten Ableitung gegeben über Nullstellen von  $8x^5 - 36x^3 + 24x$ . Diese sind  $x = 0$  und

$$x = \pm \sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{4}}, x = \pm \sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{4}}.$$

- **Verhalten im Unendlichen:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

$$f(x) = x^2 \exp(-x^2)$$



(d)  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x(\ln x)^2.$

► **Ableitungen:**  $f'(x) = (2 + \ln x) \ln x$  und  $f''(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1)$   
und  $f'''(x) = -2\frac{\ln x}{x^2}$

► **Nullstellen:**  $f(x) = 0 \iff \ln x = 1$  in  $x = 1.$

► **Polstellen:** Keine Polstellen.

► **Lokale Extrema:**  $f'(x) = 0$  in  $x = 1$  ( $\ln x = 1$ ) und  $x = e^{-2}$   
( $2 + \ln x = 0$ ).

$$f''(1) = 2 > 0 \text{ (lokales Minimum) .}$$

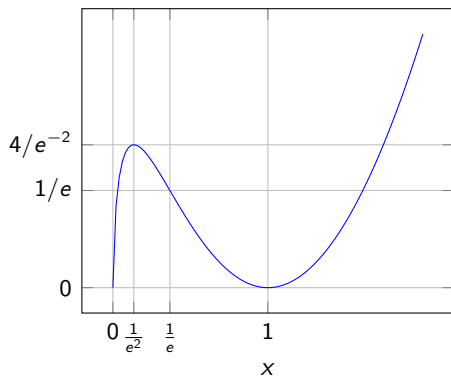
$$f''(e^{-2}) = -2e^2 < 0 \text{ (lokales Maximum)}$$

Also lokales Maximum in  $(1, 0)$  und lokales Minimum in  
 $(e^{-2}, 4e^{-2}).$

► **Wendepunkte:**  $f''(x) = 0 \iff \ln x + 1 = 0 \iff x = e^{-1}$   
und  $f'''(1/e) = 2e^2 \neq 0$ , also Wendepunkt in  $(1/e, 1/e).$

► **Verhalten im Unendlichen:**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  (L'Hospital,  
siehe nächste Aufgabe) und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$

$$f(x) = x \ln^2 x$$



## Aufgabe 1.3

Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x},$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x},$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 x,$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\sin x}.$

### Wiederholung:

Regel von l'Hospital. Seien  $f, g$  differenzierbare Funktionen auf  $D = (a, b)$  und  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Gilt dann entweder

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = \pm\infty,$$

so gilt (im Falle der Existenz)

$$\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

### Lösung:

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$  ist von der Form  $\frac{\infty}{\infty}$ . Es folgt mit l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$  ist von der Form  $\frac{0}{0}$ . Es folgt mit l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{3} = \frac{2}{3}.$$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 x$  ist von der Form  $0 \cdot (-\infty)$ . Es folgt mit l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -2x \ln x.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} -2x \ln x$  ist wieder von der Form  $0 \cdot -\infty$ . Erneute Anwendung von l'Hospital liefert

$$\lim_{x \rightarrow 0} -2 \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} -2 \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0.$$



(d) Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\sin x} = \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln(\sin x) \right).$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln(\sin x)$  ist von der Form  $0 \cdot (-\infty)$ . Es folgt mit l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln(\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\sin x = 0.$$

Insgesamt folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\sin x} = \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln(\sin x) \right) = \exp(0) = 1.$$

### Aufgabe 1.4

*Bestimmen Sie das Taylor-Polynom vom Grad  $n$  (mit Entwicklungsstelle  $x = x_0$ ) zu folgenden Funktionen.*

(a)  $f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{2}}, \quad x_0 = 0, \quad n = 2,$

(b)  $f(x) = \sqrt{1 + x}, \quad x_0 = 0, \quad n = 3,$

(c)  $f(x) = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad n = 2.$

**Wiederholung:** Satz von Taylor Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf dem offenen Intervall  $I$   $(n+1)$ -mal differenzierbare Funktion;  $x_0, x \in I$ . Dann gibt es eine Zahl  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$ , so dass

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

mit dem Taylor-Polynom  $n$ -ter Ordnung

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

und dem Lagrangeschen Restglied

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Lösung:

(a)  $f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{2}}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $n = 2$ , Es gilt

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin x}, \quad f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{1 + \sin x}},$$

$$f''(x) = \frac{-2 \sin x \sqrt{1 + \sin x} - \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1 + \sin x}}}{4(1 + \sin x)},$$

und insbesondere für  $x = 0$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4}.$$

Somit folgt

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2.$$

(b)  $f(x) = \sqrt{1+x}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $n = 3$ , Es gilt

$$f(x) = \sqrt{1+x}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2},$$

und insbesondere für  $x = 0$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4}, \quad f'''(0) = \frac{3}{8}.$$

Somit folgt

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3.$$

(c)  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $n = 2$ . Es gilt

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x,$$

und insbesondere für  $x = \frac{\pi}{2}$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} f''\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

## Aufgabe 1.5

Zur Berechnung von  $\ln(1.21)$  soll die Funktion  $f(x) = \ln(x^2)$  verwendet werden.

1. Benutzen Sie dazu den Satz von Taylor mit  $x_0 = 1$  und  $n = 0, 1, 2, 3$ .
2. Berechnen Sie näherungsweise  $\ln(1.96)$  und  $\ln(4)$  mit  $n = 3$ . Schätzen Sie außerdem den Fehler mit Hilfe des Restglieds ab.

## Lösung:

1. Für  $x$  ergibt sich  $\ln(1.21) = \ln(x^2) \Rightarrow x = 1.1$ . Wir können die Taylorreihe von  $\ln x$  nutzen, da  $f(x) = \ln(x^2) = 2 \cdot \ln|x|$  ( $x_0$  ist gleich,  $x > 0$ ). Da

$$f(x) = 2 \ln x, \quad f'(x) = \frac{2}{x}, \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{4}{x^3}$$

und insbesondere für  $x = 1$

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 2, \quad f''(1) = -2, \quad f'''(1) = 4,$$

erhalten wir als Taylorpolynome

| $n$ | $T_n(x)$                                          | $T_n(1.1)$        | $ T_n(1.1) - \ln(1.21) $ |
|-----|---------------------------------------------------|-------------------|--------------------------|
| 0   | 0                                                 | 0                 | $\approx 2e-1$           |
| 1   | $0 + 2(x - 1)$                                    | 0.2               | $\approx 1e-2$           |
| 2   | $0 + 2(x - 1) - (x - 1)^2$                        | 0.19              | $\approx 6e-4$           |
| 3   | $0 + 2(x - 1) - (x - 1)^2 + \frac{2}{3}(x - 1)^3$ | $\approx 0.19067$ | $\approx 4e-5$           |



- (2) Es gilt  $f^{(4)}(x) = -\frac{12}{x^4}$  und somit kann das Restglied kann für  $x > 1$  (und damit  $\xi \in [1, x]$ ) abgeschätzt werden durch

$$|R_3(x)| \leq \left| -\frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 \right| = \frac{1}{2}(x-1)^4.$$

Es folgt

| $x$             | $T_3(x)$         | $\ln(x^2)$       | $ T_3(x) - \ln(x^2) $ | $ R_3(x) $ |
|-----------------|------------------|------------------|-----------------------|------------|
| 1.4             | $\approx 0.6827$ | $\approx 0.6729$ | $\approx 0.0097$      | 0.0128     |
| $2 \frac{5}{3}$ |                  | $\approx 1.3863$ | $\approx 0.28$        | 0.5        |