

Lösungen zur Vorlesung Höhere Mathematik II

Prof. Peter Stollmann, Clemens Bombach,
Masoumeh Hashemi, Lutz Kämmerer, Jean Daniel Mukam,
Michael Quellmalz, und Martin Tautenhahn

TU Chemnitz

SS 2020

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1

Die Abkühlung eines erhitzten Körpers in einer (kälteren) Umgebung sei proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Körper und Umgebung.

- (a) Stellen Sie die Differentialgleichung für die Temperatur des Körpers auf!
- (b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung!
- (c) In welcher Zeit kühlt ein auf 100°C erhitzter Körper auf 30°C ab, wenn er bereits nach einer Stunde auf 60°C abgekühlt ist und die Raumtemperatur 20°C beträgt?

Aufgabe 7.1

Die Abkühlung eines erhitzten Körpers in einer (kälteren) Umgebung sei proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Körper und Umgebung.

- (a) Stellen Sie die Differentialgleichung für die Temperatur des Körpers auf!

Lösung:

Gesucht ist die Funktion $T(t)$, die die Temperatur des Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt. Die Änderung der Temperatur (T') erfolgt proportional zur Temperaturdifferenz ($T - T_0$), d.h.

$$\frac{dT}{dt} = T' = \lambda(T - T_0),$$

wobei T_0 die Umgebungstemperatur angibt und $\lambda \in \mathbb{R}$ die tatsächliche Temperaturänderung pro K Temperaturdifferenz beschreibt.

Aufgabe 7.1

Die Abkühlung eines erhitzten Körpers in einer (kälteren) Umgebung sei proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Körper und Umgebung.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung!

Lösung:

Formal bestimmt man die allgemeine Lösung durch Trennung der Variablen (siehe unten).

Alternativ kann man hier die allgemeine Lösung auch etwas anschaulicher bestimmen: Wir betrachten dazu die Temperaturdifferenz als Funktion

$$\tilde{T}(t) := T(t) - T_0.$$

Damit gilt:

$$\tilde{T}' = \frac{d\tilde{T}}{dt} = \frac{dT}{dt} = T' = \lambda(T - T_0) = \lambda\tilde{T},$$

Damit gilt:

$$\tilde{T}' = \frac{d\tilde{T}}{dt} = \frac{dT}{dt} = T' = \lambda(T - T_0) = \lambda\tilde{T},$$

was direkt an die Exponentialfunktion erinnert.

(Aus $f(x) = e^{ax}$ folgt $f'(x) = ae^{ax} = af(x)$.)

$\tilde{T}(t) = e^{\lambda t}$ scheint damit ein geeigneter Kandidat zur Lösung der Differentialgleichung, allerdings nur für $\tilde{T}(0) = 1 [= T(0) - T_0]$.

Entsprechende Skalierung erfüllt dann auch weitere Anfangsbedingungen

$$\tilde{T}(t) = Ce^{\lambda t}, \quad C \in \mathbb{R},$$

denn damit gilt ja $\tilde{T}(0) = C [= T(0) - T_0]$ und die Differentialgleichung ist auch erfüllt. Insgesamt erhält man

$$T(t) = \tilde{T}(t) + T_0 = Ce^{\lambda t} + T_0 \quad [= (T(0) - T_0)e^{\lambda t} + T_0].$$

Lösung mittels TdV:

$$\frac{dT}{dt} = \lambda(T - T_0) \quad | \text{ Variablen trennen}$$

$$\frac{1}{(T - T_0)} dT = \lambda dt \quad | \text{ Integration, links bzgl. } T, \text{ rechts bzgl. } t$$

$$\int \frac{1}{(T - T_0)} dT = \int \lambda dt \quad | \text{ Integrale lösen}$$

$$\ln |T - T_0| = \lambda t + \tilde{C} \quad | e^{(\dots)}$$

$$|T - T_0| = e^{\lambda t} e^{\tilde{C}} \quad | \text{ nach } T \text{ umstellen}$$

$$T(t) = Ce^{\lambda t} + T_0 \quad | \text{ ist allg. Lösung}$$

Wobei man

- ▶ die Integrationskonstanten beider unbestimmter Integrale auf der rechten Seite zu $\tilde{C} = C_r - C_l$ zusammenfasst,
- ▶ für $T - T_0 = 0$ gar nicht teilen kann, aber dann gilt offensichtlich $T(t) = T_0 = 0e^{\lambda t} + T_0$,
- ▶ für $T - T_0 > 0$ den Betrag weglassen kann und damit $C = e^{\tilde{C}} > 0$ erhält,
- ▶ für $T - T_0 < 0$ durch Beachtung des Betrages $C = -e^{\tilde{C}} < 0$ erhält.

Aufgabe 7.1

Die Abkühlung eines erhitzten Körpers in einer (kälteren) Umgebung sei proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Körper und Umgebung.

- (c) In welcher Zeit kühlt ein auf 100°C erhitzter Körper auf 30°C ab, wenn er bereits nach einer Stunde auf 60°C abgekühlt ist und die Raumtemperatur 20°C beträgt?

Lösung:

Wir wissen $T(t) = Ce^{\lambda t} + T_0$ und benötigen für die spezielle Anwendung die Konstanten T_0, λ, C . Diese können wir durch folgendes Gleichungssystem berechnen:

$$\begin{array}{lll} \text{Raumtemp.:} & T_0 & = 20 \\ \text{Anfangstemp.:} & T(0) = Ce^{\lambda \cdot 0} + T_0 & = 100 \\ \text{Temp. nach 1 Stunde:} & T(1) = Ce^{\lambda \cdot 1} + T_0 & = 60 \end{array}$$

Damit ergibt sich $T_0 = 20$ und $C = 80$ aus den ersten beiden Gleichungen. Aus der dritten Gleichung erhält man

$$80e^{\lambda} = 40 \Rightarrow \lambda = \ln(1/2) = -\ln(2),$$

womit sich die Temperatur $T(t) = 80e^{(-\ln 2)t} + 20 = 80(0.5)^t + 20$ ergibt.

Wir bestimmen noch die Zeit, nach der sich der Körper auf 30°C abgekühlt hat:

$$T(t) = 80(0.5)^{-t} + 20 = 30 \Rightarrow 0.5^t = 1/8 \Rightarrow t = 3 \text{ Stunden.}$$

Aufgabe 7.2

Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$N(t) = \frac{K}{1 + C e^{-rt}}, \quad C \in \mathbb{R},$$

Lösungen der *logistischen Differentialgleichung*¹

$$N'(t) = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right), \quad K > 0, r > 0,$$

sind.

Berechnen Sie die spezielle Lösung zur Anfangsbedingung $N(0) = \frac{K}{10}$.

¹Differentialgleichung des beschränkten exponentiellen Wachstums, beschreibt z.B. die Ausbreitung von Epidemien

Aufgabe 7.2

Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$N(t) = \frac{K}{1 + C e^{-rt}}, \quad C \in \mathbb{R},$$

Lösungen der *logistischen Differentialgleichung*¹

$$N'(t) = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right), \quad K > 0, \quad r > 0,$$

sind.

Berechnen Sie die spezielle Lösung zur Anfangsbedingung $N(0) = \frac{K}{10}$.

Lösung:

Da die Lösung bereits gegeben ist, reicht die Prüfung auf Korrektheit.

Sei also $N(t) = K(1 + C \exp(-rt))^{-1}$. Dann folgt mit Kettenregel

$$\begin{aligned} N'(t) &= -K(1 + C \exp(-rt))^{-2} C \exp(-rt) (-r) \\ &= K(1 + C \exp(-rt))^{-1} r \frac{C \exp(-rt)}{1 + C \exp(-rt)} = r N(t) \frac{C \exp(-rt)}{1 + C \exp(-rt)} \end{aligned}$$

¹Differentialgleichung des beschränkten exponentiellen Wachstums, beschreibt z.B. die Ausbreitung von Epidemien

$$\begin{aligned}
 N'(t) &= r N(t) \frac{C \exp(-rt)}{1 + C \exp(-rt)} = r N(t) \frac{1 + C \exp(-rt) - 1}{1 + C \exp(-rt)} \\
 &= r N(t) \left(1 - \frac{1}{1 + C \exp(-rt)} \right) = r N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right)
 \end{aligned}$$

Soll nun $N(0) = K/10$ gelten, so ergibt sich

$$\frac{K}{10} \stackrel{!}{=} N(0) = \frac{K}{1 + C \exp(-0r)} = \frac{K}{1 + C} \Rightarrow C = 9$$

Damit löst $N(t) = \frac{K}{1+9 \exp(-rt)}$ das genannte Anfangswertproblem.

Auch interessant ist das Verhalten der Lösung für wachsendes t :

$$\begin{aligned}
 N(0) = 0 &\Rightarrow N \equiv 0, & N(0) \in (0, K) &\Rightarrow N(t) \uparrow K, \\
 N(0) = K &\Rightarrow N \equiv K, & N(0) > K &\Rightarrow N(t) \downarrow K.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.3

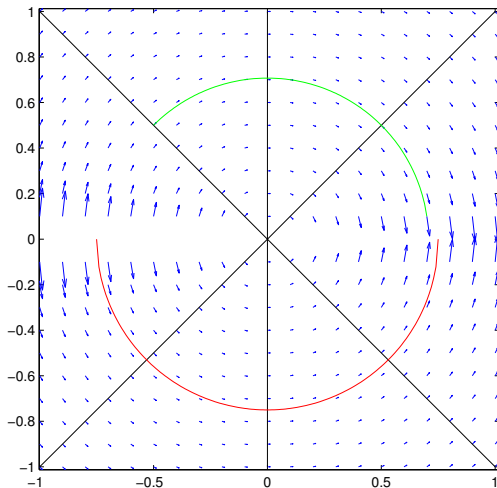
Skizzieren Sie das Richtungsfeld zur Differentialgleichung $y'(t) = -\frac{t}{y}$ und zeichnen Sie einige Isoklinen ein. Für welche Anfangspunkte $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existieren Lösungen der Differentialgleichung und wie verlaufen diese?

Aufgabe 7.3

Skizzieren Sie das Richtungsfeld zur Differentialgleichung $y'(t) = -\frac{t}{y}$ und zeichnen Sie einige Isoklinen ein. Für welche Anfangspunkte $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existieren Lösungen der Differentialgleichung und wie verlaufen diese?

Lösung:

Das Richtungsfeld (eingezeichnete Vektoren mit zu (t, y) passender Richtung und Länge) zu $y'(t) = -\frac{t}{y}$ ist in der Abbildung in blau dargestellt.



Die Isoklinen sind Kurven, entlang derer sich $y'(t)$ nicht ändert, d.h.

$$c = y' = -\frac{t}{y} \implies y = -\frac{1}{c}t.$$

Dies sind in diesem Fall Geraden durch den Ursprung, im obigen Bild sind als Beispiele die beiden schwarzen Geraden eingezeichnet.

Für alle Punkte (t_0, y_0) mit $y_0 \neq 0$ existieren Lösungen. Diese sind ermittelbar über Trennung der Veränderlichen:

$$y \, dy = -t \, dt \xrightarrow{\text{Integration}} \frac{1}{2}y^2(t) = c^2 - \frac{1}{2}t^2 \implies y(t) = \pm\sqrt{C^2 - t^2},$$

Alternativ kann man sich auch grafisch überlegen, dass die Trajektorien (Lösungskurven) der Lösungen halbkreisförmig (rot, grün) um den Ursprung verlaufen, da sie tangential zu den Isoklinen (hier: Geraden durch Ursprung, s.o.) stehen müssen.

Sowohl grafisch als auch durch die obige Formel erkennt man, dass die Lösungen nur in offenen Intervallen $(-C, C)$ existieren: $y(t)$ nähert sich an den Zeitintervallenden der 0 an, in welcher die DGL gar nicht definiert ist (und in deren Umgebung sie u.a. nicht Lipschitz-stetig bzgl. y ist).

Aufgabe 7.4

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen. Wo Anfangsbedingungen gegeben sind, lösen Sie bitte zusätzlich das angegebene Anfangswertproblem.

(a) $y' = ty^2$,

(b) $y' - y \cos(t) = 3 \cos(t)$, $y(0) = 5$,

(c) $f'(t) = \frac{tf(t)}{1-t^2}$, $f(0) = 42$,

(d) $2y'\sqrt{t} = y$, $y(4) = 1$,

(e) $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$.

Aufgabe 7.4

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen. Wo Anfangsbedingungen gegeben sind, lösen Sie bitte zusätzlich das angegebene Anfangswertproblem.

(a) $y' = ty^2$

Lösung:

$\frac{dy}{dt} = y' = ty^2$, Trennung der Variablen

$$\begin{aligned}\frac{1}{y^2} dy = t dt &\Rightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int t dt \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}t^2 + c \\ \Rightarrow y(t) &= -\frac{1}{0.5 t^2 + c} = \frac{2}{\tilde{c} - t^2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 7.4

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen. Wo Anfangsbedingungen gegeben sind, lösen Sie bitte zusätzlich das angegebene Anfangswertproblem.

$$(b) \quad y' - y \cos(t) = 3 \cos(t), \quad y(0) = 5,$$

Lösung:

Allgemeine Lösung: $\frac{dy}{dt} = \cos(t)(3 + y)$, Trennung der Variablen für $y \neq -3$

$$\frac{1}{y+3} dy = \cos t \, dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y+3} dy = \int \cos t \, dt$$

$$\Rightarrow \ln |y+3| = \sin(t) + c$$

$$\Rightarrow |y+3| = \exp(\sin(t) + c).$$

Fallunterscheidung:

$$y(t) = \left\{ \begin{array}{ll} e^c \exp(\sin(t)) - 3, & y > -3 \\ -e^c \exp(\sin(t)) - 3, & y < -3 \\ -3, & y = -3 \end{array} \right\} = \tilde{c} \exp(\sin(t)) - 3$$

Spezielle Lösung für Anfangsbedingung $y(0) = 5$:

$$5 \stackrel{!}{=} y(0) = \tilde{c} \exp(\sin(0)) - 3 = \tilde{c} - 3 \Rightarrow y(t) = 8 \exp(\sin(t)) - 3$$

Aufgabe 7.4

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen. Wo Anfangsbedingungen gegeben sind, lösen Sie bitte zusätzlich das angegebene Anfangswertproblem.

$$(c) \quad f'(t) = \frac{tf(t)}{1-t^2}, \quad f(0) = 42,$$

Lösung:

Allgemeine Lösung: $\frac{df}{dt} = f'(t) = \frac{tf(t)}{1-t^2}$, Trennung der Variablen für $f \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} df &= \frac{t}{1-t^2} dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{f} df = \int \frac{t}{1-t^2} dt \\ &\Rightarrow \quad \ln |f| = -\frac{1}{2} \ln |1-t^2| + c \\ &\Rightarrow \quad f(t) = \tilde{c} e^{-\frac{1}{2} \ln |1-t^2|} = \tilde{c} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

wobei $|1-t^2| = 1-t^2$, da wir in $t=0$ beginnen. Spezielle Lösung für Anfangsbedingung $f(0) = 42$:

$$42 \stackrel{!}{=} f(0) = \frac{\tilde{c}}{\sqrt{1-0^2}} = \tilde{c} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{42}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Aufgabe 7.4

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen. Wo Anfangsbedingungen gegeben sind, lösen Sie bitte zusätzlich das angegebene Anfangswertproblem.

(d) $2y'\sqrt{t} = y, \quad y(4) = 1,$

Lösung:

Allgemeine Lösung: $\frac{dy}{dt} = y'(t) = \frac{y}{2\sqrt{t}}$, Trennung der Variablen für $y \neq 0$
(und $t \neq 0$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} dy &= \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\ &\Rightarrow \quad \ln |y| = \sqrt{t} + c \quad \Rightarrow \quad y(t) = \tilde{c} e^{\sqrt{t}}.\end{aligned}$$

Spezielle Lösung für Anfangsbedingung $y(4) = 1$:

$$1 \stackrel{!}{=} y(4) = \tilde{c} e^{\sqrt{4}} = \tilde{c} e^2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{c} = e^{-2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{\sqrt{t}-2}.$$

Aufgabe 7.4

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen. Wo Anfangsbedingungen gegeben sind, lösen Sie bitte zusätzlich das angegebene Anfangswertproblem.

$$(e) \quad y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0.$$

Lösung:

Allgemeine Lösung: $\frac{dy}{dt} = y'(t) = 1 + y^2$, Trennung der Variablen für $y \neq 0$ (und $t \neq 0$)

$$\frac{1}{1+y^2} dy = 1 dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{1+y^2} dy = \int 1 dt$$
$$\stackrel{\text{Aufg. 4.11}}{\Rightarrow} \arctan(y) = t + c \quad \Rightarrow \quad y(t) = \tan(t + c).$$

Spezielle Lösung für Anfangsbedingung $y(0) = 0$:

$$0 \stackrel{!}{=} y(0) = \tan(c) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \tan(t).$$

Aufgabe 7.5

Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen an. Führen Sie zunächst die angegebene Variablensubstitution durch, um eine für die Trennung der Veränderlichen geeignete Struktur der Differentialgleichung zu erhalten.

(a) $y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2, \quad z = \frac{y}{t},$

(b) $ty' = y(1 + \ln y - \ln t), \quad z = \frac{y}{t},$

(c) $y' = \frac{1}{2}(t + 2y)^2, \quad z = t + 2y.$

Aufgabe 7.5

Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen an. Führen Sie zunächst die angegebene Variablensubstitution durch, um eine für die Trennung der Veränderlichen geeignete Struktur der Differentialgleichung zu erhalten.

$$(a) \quad y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2, \quad z = \frac{y}{t},$$

Lösung:

$y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2$, $z(t) = \frac{y(t)}{t}$. Es folgt mit Produktregel
 $y'(t) = \frac{d}{dt}(t z(t)) = z(t) + t z'(t)$, ergo:

$$z + t z' = y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2 = z - z^2 \quad \Rightarrow \quad z' = -\frac{z^2}{t}$$

und mit TdV erhalten wir

$$\int \frac{1}{z^2} dz = \int -\frac{1}{t} dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{z} = -\ln|t| + c \quad \Rightarrow \quad z(t) = \frac{1}{\ln|t| + \tilde{c}}.$$

Rücksubstitution liefert uns schließlich

$$\frac{y(t)}{t} = z(t) = \frac{1}{\ln|t| + \tilde{c}} \quad \Rightarrow \quad y(t) = t z(t) = \frac{t}{\ln|t| + \tilde{c}}.$$

Aufgabe 7.5

Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen an. Führen Sie zunächst die angegebene Variablensubstitution durch, um eine für die Trennung der Veränderlichen geeignete Struktur der Differentialgleichung zu erhalten.

(b) $ty' = y(1 + \ln y - \ln t), \quad z = \frac{y}{t},$

Lösung:

$y' = \frac{y}{t}(1 + \ln \frac{y}{t}), \quad z = \frac{y}{t}.$ Wie bei (a) gilt $y' = z + t z'$, womit folgt:

$$z + t z' = y' = \frac{y}{t}(1 + \ln \frac{y}{t}) = z(1 + \ln z) \Rightarrow z' = \frac{z(1 + \ln z) - z}{t} = \frac{z \ln z}{t}.$$

TdV ergibt

$$\int \frac{1}{z \ln z} dz = \int \frac{1}{t} dt \Rightarrow \ln |\ln z| = \ln |t| + c \Rightarrow \ln z = \tilde{c} t \Rightarrow z(t) = e^{\tilde{c} t},$$

wobei $\int 1/(z \ln z) dz$ mit der Substitution $w = \ln z, dw = \frac{1}{z} dz$ bestimmt wurde. Rücksubstitution liefert

$$\frac{y(t)}{t} = z(t) = e^{\tilde{c} t} \Rightarrow y(t) = t z(t) = t e^{\tilde{c} t}.$$

Aufgabe 7.5

Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen an. Führen Sie zunächst die angegebene Variablensubstitution durch, um eine für die Trennung der Veränderlichen geeignete Struktur der Differentialgleichung zu erhalten.

$$(c) \quad y' = \frac{1}{2}(t + 2y)^2, \quad z = t + 2y.$$

Lösung:

$$y' = \frac{1}{2}(t + 2y)^2, \quad z = t + 2y.$$

Es gilt $y(t) = \frac{1}{2}z(t) - \frac{1}{2}t$ und somit $y' = \frac{1}{2}z' - \frac{1}{2}$. Daraus folgt

$$\frac{1}{2}z' - \frac{1}{2} = y' = \frac{1}{2}(t + 2y)^2 = \frac{1}{2}z^2 \quad \implies \quad z' = z^2 + 1.$$

TdV ergibt

$$\frac{1}{z^2 + 1} dz = 1 dt \quad \implies \quad \arctan z = t + c \quad \implies \quad z(t) = \tan(t + c).$$

Rücksubstitution liefert

$$y(t) = \frac{1}{2}z(t) - \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\tan(t + c) - \frac{t}{2}.$$