

Lösungen zur Vorlesung Höhere Mathematik II

Prof. Dr. Peter Stollmann, Dr. Lutz Kämmerner,
Dr. Michael Quellmalz, Dr. Martin Tautenhahn,
Clemens Bombach, Masoumeh Hashemi

TU Chemnitz

SS 2020

Übungsblatt 8

Aufgabe 1.1

Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme mittels Variation der Konstanten bzw. speziellen Ansätzen:

(a) $y' = ty + 2t, \quad y(0) = 2,$

(b) $(t^2 + 2)y' - 2ty = 3(t^2 + 2)^2, \quad y(-1) = 6,$

(c) $y' = 2y - t^3 + t, \quad y(0) = 0,$

(d) $y' = -\pi y + 2 \sin(\pi t), \quad y(0) = 0.$

Wiederholung: Variation der Konstanten, homogene und inhomogene Lösung

(a) $y' = ty + 2t =: \mathbf{f(t)y} + \mathbf{g(t)}$, $y(0) = 2$.

Lösung y_h des **homogenen Problems** mittels TdV

$$\begin{aligned} y'_h = f(t) y_h &\Rightarrow \frac{1}{y_h} dy_h = f(t) dt = t dt \\ &\Rightarrow \ln |y_h| = \int f(t) dt = \frac{1}{2} t^2 + c \end{aligned}$$

$$F(t) := \int f(t) dt = \frac{1}{2} t^2 + c$$

also

$$y_h(t) = C e^{F(t)} = C e^{\frac{1}{2} t^2}.$$

Nun VdK zur Bestimmung der **speziellen Lösung** $y_s(t) = C(t)e^{\frac{1}{2}t^2}$ der **inhomogenen Gleichung** $y'_s = ty_s + 2t$. Wir erhalten

$$ty_s + 2t = y'_s(t) = C'(t) e^{\frac{1}{2}t^2} + C(t) t e^{\frac{1}{2}t^2} = C'(t) e^{\frac{1}{2}t^2} + ty_s$$

und müssen also nur noch

$$2t = C'(t) e^{\frac{1}{2}t^2} \Rightarrow C'(t) = 2t e^{-\frac{1}{2}t^2} = g(t) e^{-F(t)}$$

integrieren.

Mit Substitution $z = \frac{1}{2}s^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} C(t) &= \int_{-\infty}^t g(s) \exp(-F(s)) ds = 2 \int_{-\infty}^t s \exp\left(-\frac{1}{2}s^2\right) ds \\ &= 2 \int_{-\infty}^t \exp(-z) dz = -2e^{-\frac{1}{2}t^2} \end{aligned}$$

und damit als **allgemeine Lösung**

$$y(t) = y_h(t) + y_s(t) = C e^{\frac{1}{2}t^2} + \left(-2e^{-\frac{1}{2}t^2}\right) e^{\frac{1}{2}t^2} = C e^{\frac{1}{2}t^2} - 2.$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 2$ liefert uns schließlich

$$2 = y(0) = C e^{\frac{1}{2}0^2} - 2 = C - 2 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 4e^{\frac{1}{2}t^2} - 2$$

als **Lösung des Anfangswertproblems**.

Probe mit TdV:

$$\begin{aligned} y' = ty + 2t &\Rightarrow \frac{1}{y+2} dy = t dt \Rightarrow \ln |y+2| = \frac{1}{2}t^2 + c \\ &\Rightarrow y(t) = \tilde{c} \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right) - 2. \end{aligned}$$

(b) $(t^2 + 2)y' - 2ty = 3(t^2 + 2)^2$, $y(-1) = 6$. Zunächst umformen

$$y' = \underbrace{\frac{2t}{t^2 + 2}}_{=f(t)} y + \underbrace{3(t^2 + 2)}_{=g(t)}.$$

Als Lösung der homogenen Gleichung unter Nutzung von geeigneter Substitution $z = t^2 + 2$ bei der Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} F(t) &= \int f(t) dt = \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \ln |t^2 + 2| \\ \Rightarrow y_h(t) &= Ce^{F(t)} = C(t^2 + 2). \end{aligned}$$

Spezielle Lösung $y_s(t) = C(t)(t^2 + 2)$ mit VdK liefert

$$\begin{aligned} C(t) &= \int_{-\infty}^t g(s) \exp(-F(s)) \, ds \\ &= 3 \int_{-\infty}^t (s^2 + 2) \exp(-\ln |s^2 + 2|) \, ds = 3t, \end{aligned}$$

was zur allgemeinen Lösung

$$y(t) = y_h(t) + y_s(t) = (C + 3t)(t^2 + 2)$$

führt.

Die Anfangsbedingung liefert schließlich

$$\begin{aligned} 6 = y(-1) &= (-3 + C)(1^2 + 2) \quad \Rightarrow \quad C - 3 = 2 \\ &\Rightarrow \quad y(t) = (3t + 5)(t^2 + 2) \end{aligned}$$

als Lösung des Anfangswertproblems.

(c) Wiederholung: Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten und spezielle Ansätze

$y' = 2y + (t - t^3)$, $y(0) = 0$. Lösung der homogenen Gleichung

$$F(t) = \int f(t) dt = \int 2 dt = 2t \Rightarrow y_h(t) = Ce^{2t}.$$

VdK-Ansatz $y_s(t) = C(t) e^{2t}$ würde zum Folgenden führen

$$C(t) = \int (-s^3 + s) e^{-2s} ds$$

was erneut mit mehrfacher partieller Integration berechnet werden kann.

Einfacher: spezieller Ansatz für y_s gemäß Folie 340 der Vorlesung

$$y_s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d.$$

Einsetzen in DGL liefert

$$y'_s(t) = 3at^2 + 2bt + c \stackrel{!}{=} 2y_s(t) - t^3 + t = (2a-1)t^3 + 2bt^2 + (2c+1)t + 2d.$$

Koeffizientenvergleich links und rechts ergibt nun

$$t^0 : c = 2d, \quad t^1 : 2b = 2c+1, \quad t^2 : 3a = 2b, \quad t^3 : 0 = 2a-1.$$

Sukzessives Abarbeiten (rechts nach links) liefert uns

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{3}{4}, \quad c = \frac{1}{4}, \quad d = \frac{1}{8}.$$

Wir erhalten als allgemeine Lösung

$$y(t) = y_s(t) + y_h(t) = \left(\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}t + \frac{1}{8} \right) + ce^{2t}$$

und mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$

$$0 = \frac{1}{8} + c \quad \Rightarrow \quad y(t) = \left(\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}t + \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{8}e^{2t}$$

als Lösung des Anfangswertproblems.

(d) $y' = -\pi y + 2 \sin(\pi t)$, $y(0) = 0$. Lösen der homogenen Gleichung

$$F(t) = \int f(t) dt = \int -\pi dt = -\pi t \Rightarrow y_h(t) = C e^{-\pi t}.$$

VdK würde folgendes ergeben:

$$C(t) = 2 \int \sin(\pi s) e^{-\pi s} ds.$$

Wir wählen stattdessen einen Ansatz gemäß Folie 65 der Vorlesung

$$y_s(t) = a \sin(\pi t) + b \cos(\pi t)$$

und erhalten durch Einsetzen in die DGL

$$\begin{aligned} y'_s(t) &= a\pi \cos(\pi t) - b\pi \sin(\pi t) \stackrel{!}{=} -\pi y_s(t) + 2 \sin(\pi t) \\ &= (2 - a\pi) \sin(\pi t) - b\pi \cos(\pi t) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich links und rechts ergibt

$$\sin(\pi t) : -\pi b = 2 - a\pi, \quad \cos(\pi t) : a\pi = -b\pi.$$

Einsetzen der zweiten in die erste Gleichung liefert

$$-\pi b = 2 + b\pi, \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{\pi}, \quad a = \frac{1}{\pi}.$$

Wir erhalten als allgemeine Lösung

$$y(t) = y_s(t) + y_h(t) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi t) - \frac{1}{\pi} \cos(\pi t) + ce^{-\pi t}$$

und mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$

$$1 = -\frac{1}{\pi} + c \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi t) - \frac{1}{\pi} \cos(\pi t) + \frac{1}{\pi} e^{-\pi t}$$

als Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 1.2

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme:

(a) $y'' + 2y' - 3y = 0,$

(b) $4y'' - 4y' + y = 0,$

(c) $y'' - 2y' + y = 1, \quad y(0) = \frac{5}{4}, \quad y'(0) = 0,$

(d) $y'' + 4y = 2t, \quad y(0) = y'(0) = 0,$

(a) $y'' + 2y' - 3y = 0$. Wir lösen diese homogene Gleichung wie in der Vorlesung besprochen durch Rückführung auf ein DGL-System erster Ordnung:

$$y'' = -2y' + 3y \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}'}_{=:A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(-2 - \lambda) - 3 = \lambda^2 + 2\lambda - 3 \\ \Rightarrow \quad \text{Nullstellen: } \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3}.$$

Man verweise auf die Struktur von $p_A(\lambda)$:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b \quad \Longleftrightarrow \quad y'' + ay' + by = 0.$$

Die Nullstellen von p_A hier sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -3$ und damit bilden $y_1(t) = e^{1t}$ und $y_2(t) = e^{-3t}$ ein

Fundamentalsystem der linearen DGL 1. Ordnung und damit auch der DGL 2. Ordnung. Wir erhalten als allgemeine Lösung

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-3t}.$$

(b) $4y'' - 4y' + y = 0$. Entsprechendes charakteristisches Polynom:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} \Rightarrow \text{Nullstellen: } \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Wir haben einen einzigen Eigenwert und nach Vorlesung ergibt sich die allgemeine Lösung mittels des Fundamentalsystems

$$y(t) = c_1 e^{\frac{t}{2}} + c_2 t e^{\frac{t}{2}},$$

vgl. auch Aufgabe 1.

(c) $y'' - 2y' + y = 1$, $y(0) = \frac{5}{4}$, $y'(0) = 0$. Ein inhomogenes Problem. Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung des homogenen Problems:

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Rightarrow$ Nullstellen: $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$
ergibt

$$y_h(t) = e^t(c_1 + c_2 t).$$

Da der Störterm ein Polynom vom Grad 0 ist (und bei uns $b = 1 \neq 0$), wählen wir als Ansatz für die spezielle Lösung $y_s(t) \equiv K$. Eingesetzt in die DGL ergibt sich

$$y_s'' - 2y_s' + y_s = 0 - 2 \cdot 0 + K \stackrel{!}{=} 1.$$

Als allgemeine Lösung des inhomogenen Problems erhalten wir somit

$$y(t) = 1 + e^t(c_1 + c_2 t)$$

und mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1 + c_1 = \frac{5}{4}$ und $y'(0) = c_1 + c_2 = 0$ schließlich

$$y(t) = 1 + e^t \left(\frac{1}{4} - \frac{t}{4} \right).$$

(d) $y'' + 4y = 2t$, $y(0) = y'(0) = 0$. Allgemeine Lösung des homogenen Problems:

$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 4 \Rightarrow$ Nullstellen: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{0-4} = \pm 2i$
ergibt

$$y_h(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t).$$

Ansatz für spezielle Lösung des inhomogenen Problems als Polynom vom Grad 1, $y_s(t) = k_1 + k_2 t$, da Störterm Polynom 1. Grades und $b = 4 \neq 0$. Einsetzen in DGL:

$$y_s'' + 4y_s = 0 + 4(k_1 + k_2 t) = 4k_1 + 4k_2 t \stackrel{!}{=} 2t$$

liefert mittels Koeffizientenvergleich $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{1}{2}$.

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$y(t) = y_s(t) + y_h(t) = \frac{t}{2} + c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t).$$

Anfangsbedingungen ergeben

$$0 = y(0) = \frac{0}{2} + c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1,$$

$$0 = y'(0) = \frac{1}{2} - 2c_2 \sin(0) + 2c_2 \cos(0) = \frac{1}{2} + 2c_2$$

Aufgabe 1.3

Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

- (a) Bestimmen Sie die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$X'(t) = AX(t).$$

- (b) Lösen Sie mittels Variation der Konstanten

$$X'(t) = AX(t) + b, \quad b = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Wiederholung: Lineare DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten

- (a) Die allgemeine Lösung der DGL $X' = AX$ ist eine Linearkombination der Funktionen $X(t) = \exp(\lambda t)\vec{v}$, wobei λ ein Eigenwert von A und $\vec{v}$ der entsprechende Eigenvektor zu λ ist.

Wir bestimmen also zunächst alle Eigenwerte von A mittels seines charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= (3 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{9 - 8}. \end{aligned}$$

Somit sind $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 2$ Eigenwerte von A .

Die entsprechenden Eigenvektoren ergeben sich wie folgt

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\vec{v} = 0 &\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

was zum Eigenvektor $\vec{v}_1 = (1, 1)^\top$ führt – die Normierung muss hier nicht unbedingt erfolgen – und

$$\begin{aligned}(A - \lambda_2 I)\vec{v} = 0 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

was als zweiten Eigenvektor $\vec{v}_2 = (1, -1)^\top$ ergibt.

Die allgemeine Lösung des homogenen Problems ist nun nach Satz 9.10 der Vorlesung

$$X_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} c_1 e^{4t} + c_2 e^{2t} \\ c_1 e^{4t} - c_2 e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

- (b) Um die Lösung der inhomogenen DGL zu bestimmen führen wir die Variation der Konstanten analog zu den eindimensionalen DGL durch. Wir setzen

$$C(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}, \quad X_s(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{2t} \end{pmatrix} C(t)$$

und erhalten beim Einsetzen in die DGL

$$\begin{aligned} X_s'(t) &= \begin{pmatrix} 4e^{4t} & 2e^{2t} \\ 4e^{4t} & -2e^{2t} \end{pmatrix} C(t) + \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{2t} \end{pmatrix} C'(t) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{2t} \end{pmatrix} C(t) + \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{2t} \end{pmatrix} C'(t) \\ &= AX_s(t) + \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{2t} \end{pmatrix} C'(t) \\ &\stackrel{!}{=} AX_s(t) + \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir müssen also

$$\begin{pmatrix} e^{4t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{2t} \end{pmatrix} C'(t) = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow C'(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{2t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

lösen. Dazu

$$\begin{pmatrix} e^{4t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{2t} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2e^{6t}} \begin{pmatrix} -e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^{4t} & e^{4t} \end{pmatrix}$$

was auf

$$C'(t) = -\frac{1}{2e^{6t}} \begin{pmatrix} 8e^{2t} \\ 4e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4e^{-4t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix} \Rightarrow C(t) = \begin{pmatrix} e^{-4t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

führt.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet dann

$$X(t) = X_s(t) + X_h(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{2t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} e^{-4t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right].$$

Aufgabe 1.4

Weisen Sie nach, dass die Funktionen $y_1(t) = e^{-t}$ und $y_2(t) = te^{-t}$ ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + y = 0$$

bilden.

Wiederholung: Fundamentalsystem und Wronski-Determinante

Wir prüfen zunächst nach, ob $y_1(t) = e^{-t}$ und $y_2(t) = te^{-t}$ die DGL erfüllen:

$$y_1' = -y_1, \quad y_1'' = y_1 \quad \Rightarrow \quad y_1'' + 2y_1' + y_1 = (1 - 2 + 1) y_1 = 0.$$

und

$$\begin{aligned} y_2' &= -y_2 + e^{-t}, \quad y_2'' = y_2 - 2e^{-t} \\ \Rightarrow \quad y_2'' + 2y_2' + y_2 &= (1 - 2 + 1) y_2 - 2e^{-t} + 2e^{-t} = 0. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Wronski-Determinante des entsprechenden linearen DGL-Systems 1. Ordnung

$$y'' = -2y' - y \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & -te^{-t} + e^{-t} \end{vmatrix} \\ &= -te^{-2t} + e^{-2t} - (-te^{-2t}) = e^{-2t} > 0. \end{aligned}$$

Damit sind y_1 und y_2 also ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung und deren allgemeine Lösung hat die Form

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$