

Lösungen zur Vorlesung Höhere Mathematik II

Prof. Dr. Peter Stollmann, Dr. Lutz Kämmerer,
Dr. Michael Quellmalz, Dr. Martin Tautenhahn,
Clemens Bombach, Masoumeh Hashemi

TU Chemnitz

SS 2020

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1

Die ersten Glieder zweier Folgen lauten:

(a) $\frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots$

(b) $-2, -5, -8, -11, -14, \dots$

Können diese als arithmetische oder geometrische Folge fortgesetzt werden?

Wenn ja, geben Sie eine explizite und eine rekursive Bildungsvorschrift der Folge an und setzen die Folge entsprechend dieser Bildungsvorschrift um drei Glieder fort.

Lösung:

- (a) kann als geometrische Folge fortgesetzt werden, indem man für $n \geq 0$ die Folge $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ betrachtet. Eine rekursive Bildungsvorschrift ist durch $a_0 = \frac{3}{2}$, $a_n = \frac{2}{3}a_{n-1}$ für $n \geq 1$ gegeben.
- (b) kann als arithmetische Folge fortgesetzt werden, indem man für $n \geq 0$ die Folge $b_n = -2 - 3n$ betrachtet. Eine rekursive Bildungsvorschrift ist durch $a_0 = -2$, $a_n = a_{n-1} - 3$ für $n \geq 1$ gegeben.

Aufgabe 1.2

Zeigen Sie anhand der Grenzwertdefinition, dass (a_n) mit $a_n = \frac{1}{2n-1}$ eine Nullfolge ist. Wie groß ist $n_0 \in \mathbb{N}$ mindestens zu wählen, dass $|a_n| < 10^{-4}$ für $n \geq n_0$ gilt?

Lösung: Folgendes ist zu zeigen: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n| < \varepsilon \iff \frac{1}{2n-1} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right).$$

Sei $\varepsilon > 0$. Das Archimedische Axiom besagt, dass für jede reelle Zahl eine natürliche Zahl existiert, die größer als diese reelle Zahl ist. Also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $n_0 > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)$. Es gilt dann $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Für $\varepsilon = 10^{-4}$ folgt $n_0 > \frac{1}{2}(10^4 + 1) = 5000.5$. Also wählt man $n_0 = 5001$.

Aufgabe 1.3

Für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^n$, und was ist der entsprechende Wert?

Lösung: Sei $q \in \mathbb{R}$. Die geometrische Folge $(q^n)_{n \geq 0}$ konvergiert genau dann, wenn $-1 < q \leq 1$. Der Grenzwert ist dann 0 für $|q| < 1$ und 1 für $q = 1$. Also muss für Konvergenz $-1 < \frac{x+1}{x-1} \leq 1$ gelten. $\frac{x+1}{x-1} = 1$ ist nicht möglich, da $x+1 \neq x-1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Folglich muss

$$\left| \frac{x+1}{x-1} \right| < 1 \iff |x+1| < |x-1| \iff x < 0$$

gelten. Der letzte Schritt kann dabei leicht durch eine Fallunterscheidung nachvollzogen werden.

Zusammengefasst: Die Folge konvergiert wenn $x < 0$ gegen 0 für $n \rightarrow \infty$. Andernfalls divergiert sie.

Aufgabe 1.4

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

$$(a) a_n = \frac{11-n^2}{n+2},$$

$$(b) a_n = \frac{(n+1)^2}{n^2+1},$$

$$(c) a_n = \frac{n-4}{n^2+3n+8},$$

$$(d) a_n = \frac{3n^5+n^3-1}{12n^5+23},$$

$$(e) a_n = (-1)^n \frac{n^2+n+2}{5n^2+4n+3},$$

$$(f) a_n = (-1)^n \frac{n^2+2}{5n^3+4n+3},$$

$$(g) a_n = \frac{2^n+(-2)^n}{2^n},$$

$$(h) a_n = \frac{2^n+(-2)^n}{5^n}.$$

Lösung von (4a) - (4d):

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11-n^2}{n+2} = \frac{n}{n} \frac{11/n-n}{1+2/n} = \frac{0-\infty}{1+0} = -\infty.$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2} \frac{1+2/n+1/n^2}{1+1/n^2} = \frac{1+0+0}{1+0} = 1.$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-4}{n^2+3n+8} = \frac{n}{n} \frac{1-4/n}{n+3+8/n} = \frac{1-0}{\infty+3+0} = 0.$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5+n^3-1}{12n^5+23} = \frac{n^5}{n^5} \frac{3+1/n^2-1/n^5}{12+23/n^5} = \frac{3+0-0}{12+0} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Lösung von (4e) - (4h):

(e) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+2}{5n^2+4n+3} = \frac{1}{5}$. Somit divergiert a_n , da

$$|a_{n+1} - a_n| = 2 \frac{n^2 + n + 2}{5n^2 + 4n + 3} \rightarrow \frac{2}{5}, \quad (n \rightarrow \infty).$$

(f) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{5n^3+4n+3} = 0$. Somit ist $(a_n)_{n \geq 0}$ ein Produkt aus einer Nullfolge und der beschränkten Folge $((-1)^n)_{n \geq 0} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(g) Es gilt $a_n = \frac{2^n + (-2)^n}{2^n} = 1 + (-1)^n \implies$ Die Folge divergiert, da $|a_{n+1} - a_n| = 2$.

(h) Es gilt $a_n = \frac{2^n + (-2)^n}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(-\frac{2}{5}\right)^n$. Da die beiden Summanden für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergieren, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Aufgabe 1.5

Untersuchen Sie die angegebenen Zahlenfolgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Ermitteln Sie ggf. den Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{n+3}{n}$, (b) $b_n = 1 + 2^n + (-2)^n$,

(c) $c_n = \sqrt{1 - \cos(\frac{1}{n})}$.

Lösung:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$a_n = 1 + \frac{3}{n} > 1 + \frac{3}{n+1} = a_{n+1},$$

also ist $(a_n)_{n \geq 1}$ streng monoton fallend. Der Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ ist 1. Da sie konvergent ist, ist sie auch beschränkt.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $b_{2n} = 1 + 2^{2n} + 2^{2n} = 1 + 2^{2n+1}$ und $b_{2n-1} = 1$. Die Folge ist daher weder monoton wachsend noch monoton fallend. Wegen $b_{2n} \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ ist sie unbeschränkt und nicht konvergent.

(c) Die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \cos(x)$$

ist streng monoton fallend. Weil $((1/n))_{n \geq 1}$ auch streng monoton fallend ist, ist die Folge $((f_n))_{n \geq 1} = ((\cos(1/n)))_{n \geq 1}$ streng monoton wachsend. Da die Funktion

$$g : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \sqrt{1 - x}$$

streng monoton fallend ist, folgt, dass

$(c_n)_{n \geq 1} = (g(f(1/n)))_{n \geq 1}$ streng monoton fallend ist. Es gilt $1/n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Da f und g stetig sind, folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = f(g(0)) = f(1) = 0$. Die Folge ist damit konvergent und somit auch beschränkt.

Aufgabe 1.6

Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \sqrt[n]{4n} \right)$.

Lösung: Wir erinnern uns daran, dass

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e, \quad \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Des Weiteren gilt wegen der Multiplikativität des Grenzwerts $\sqrt[n]{4n} = \sqrt[n]{4} \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$. Unter Beachtung der Linearität des Grenzwertes folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \sqrt[n]{4n} \right) = 2e + 1.$$

Aufgabe 1.7

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

$$(a) a_n = \frac{1+2+\dots+n}{9n+1}, \quad (b) b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},$$
$$(c) c_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}, \quad (d) d_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad (e) e_n = n^{(-1)^n}.$$

Lösung:

- (a) $\frac{1+2+\dots+n}{9n+1} = \frac{n(n+1)/2}{9n+1} = \frac{n+1}{18+2/n} \rightarrow \infty, \quad (n \rightarrow \infty).$
- (b) $b_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$
- (c) Es gilt $3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 2^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3 \cdot \sqrt[n]{2}$. Die Folge auf der rechten Seite der Ungleichungskette konvergiert gegen 3 für $n \rightarrow \infty$. Damit folgt $c_n \rightarrow 3$ für $n \rightarrow \infty$.
- (d) Da $(\sin \frac{n\pi}{2})_{n \geq 1}$ beschränkt und $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n \geq 1}$ eine Nullfolge ist, folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$.
- (e) Es gilt $e_{2n} = 2n$. Also hat $(e_n)_{n \geq 1}$ eine divergente Teilfolge und divergiert somit.