

# Mathematik II

(für IF, ET, Ph)

Peter Stollmann

Professur Analysis

Sommersemester 2020

**Studiengänge:** B Angewandte Informatik, B Informatik,  
M Informatik für Geistes- und Sozialwissenschaftler, B Biomedizinische Technik,  
B Regenerative Energietechnik, B Elektromobilität, B Elektrotechnik,  
B Computational Science, B Physik



Mathematik!  
TU Chemnitz

## ③ Folgen und Reihen

3.1 Folgen

3.2 Grenzwerte und Konvergenz

3.3 Unendliche Reihen

## ④ Grenzwerte, Stetigkeit und Beispiele reeller Funktionen

4.1 Grundlegende Eigenschaften

4.2 Grenzwerte reeller Funktionen

4.3 Stetigkeit

4.4 Elementare Funktionen

- Polynome
- Rationale Funktionen
- Wurzel- und Potenzfunktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktionen
- Trigonometrische Funktionen und Arkusfunktionen
- Hyperbel- und Areafunktionen

## ⑤ Differentialrechnung in einer Variablen

5.1 Differenzierbarkeit

5.2 Differentiationsregeln

5.3 Ableitungen elementarer Funktionen

5.4 Extrema, Wachstum und Krümmung differenzierbarer Funktionen

5.5 Verschiedene Anwendungen

- Kurvendiskussion
- Newton-Verfahren
- Die Regel von de l'Hospital
- Totales Differential und Fehlerfortpflanzung

5.6 Der Satz von Taylor

## ⑥ Integralrechnung in einer Variablen

6.1 Der Riemannsches Integralbegriff

6.2 Integrationstechniken

6.3 Uneigentliche Integrale

6.4 Volumenberechnung bei Rotationskörpern

6.5 Quadraturformeln – ein erster Einblick

## ⑦ Differentialgleichungen

7.1 Einführende Beispiele

7.2 Begriffe und Lösbarkeitsfragen

7.3 Differentialgleichungen erster Ordnung

7.4 Trennung der Veränderlichen

- 7.5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung
- 7.6 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- 7.7 Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten
- 7.8 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- 7.9 Anwendung: Mechanische Schwingungen

## 8 Potenz- und Fourier-Reihen

- 8.1 Konvergenz von Funktionenfolgen
- 8.2 Potenzreihen
- 8.3 Fourier-Reihen
  - Begriff, Konvergenz, und Darstellbarkeit von Funktionen
  - Funktionen mit beliebiger Periode
  - Konvergenz, Gliedweise Differentiation und Integration
  - Komplexe Darstellung

## Vorlesung

Prof. Peter Stollmann

Mo 9:15 Raum C10.112

Di 15:30 Raum A10.201

## Übungen/Praktika

Hashemibarmchi, S. Mi 7:30 : B\_AICG2, B\_AIES2, B\_AIMI2, B\_AIVS2

Mo 17:15

Tautenhahn, M. Fr 13:45 : B\_AU, B\_In\*

Mo 17:15

Mukam, J. D. Do 13:45 : B\_CS, B\_Ph

Mi 7:30

Bombach, C. Do 13:45 : B\_BT, B\_RE

Mi 17:15

Bombach, C. Fr 11:30 : B\_EM, B\_ET

Mo 11:30

# Organisatorisches

Sie

	Studiengang	SWS	Klausurzeit	LP	AS	Studenten
B_In	Informatik	4V+2Ü+2P	120	9	270	43
B_AI	Angewandte Informatik	4V+2Ü+2P	120	9	270	30
B_BT	Biomedizinische Technik	4V+2Ü+2P	120	8	240	32
B_EM	Elektromobilität	4V+2Ü+2P	120	8	240	24
B_ET	Elektrotechnik und Informationstechnik	4V+2Ü+2P	120	8	240	23
B_RE	Regenerative Energietechnik	4V+2Ü+2P	120	8	240	32
B_Ph	Physik	4V+2Ü(+2P)	120	8	240	36
B_CS	Computational Science	4V+2Ü(+2P)	120	8	240	3
M_IG	Informatik f. Geistes- u. Soz.-Wiss.)	4V+2Ü+2P	120	9	270	29
						<b>252</b>

(laut Modulbeschreibungen **Mathematik II** bzw. **Höhere Mathematik 2**)

AS = Gesamtarbeitsaufwand in Stunden

LP = Leistungspunkte

Neben der Präsenzzeit von 4,5 bzw. 5,25 h/Woche (= 67,5 bzw. 78,75 h gesamt) entfällt also ein erheblicher Anteil auf **Selbststudium**:

- Vor- und Nachbereitung von Lehrveranstaltungen,
- Literaturstudium,
- Lösen von Übungs- und Praktikumsaufgaben,
- Prüfungsvorbereitung.

- Klausurarbeit am Ende des Sommersemesters (Umfang laut Tabelle).
- Termin wird bekanntgegeben sobald von zentraler Prüfungsplanung verkündet.
- Zugelassene Hilfsmittel: Ausdruck dieser Folien, Randnotizen hierauf, Formelsammlung (keine Taschenrechner).

- ③ Folgen und Reihen
- ④ Grenzwerte, Stetigkeit und Beispiele reeller Funktionen
- ⑤ Differentialrechnung in einer Variablen
- ⑥ Integralrechnung in einer Variablen
- ⑦ Differentialgleichungen
- ⑧ Potenz- und Fourier-Reihen

## ③ Folgen und Reihen

### 3.1 Folgen

### 3.2 Grenzwerte und Konvergenz

### 3.3 Unendliche Reihen

Betrachten Sie folgende Liste von Zahlen:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Erkennen Sie ein Muster, mit dem man die Liste sinnvoll fortsetzen kann?

Ist die Regel einmal erkannt, so können Sie mit diesem Gesetz zu jeder vorgegebenen Position das zugehörige Element der Liste ausrechnen.

Jeder natürlichen Zahl („Index“) wird dabei eine reelle Zahl („Folglied“) zugeordnet – es entsteht eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Diese Abbildungen heißen (reelle) **Zahlenfolgen**. Sie spielen in vielen Anwendungen eine große Rolle und liefern uns den Schlüssel zum Verständnis des **Grenzwerts** – des wohl wichtigsten Begriffs der Analysis.

### Definition 3.1 (Zahlenfolge)

Eine Abbildung  $a$ , die jeder natürlichen Zahl  $n$  eine reelle Zahl  $a_n$  zuordnet, heißt (unendliche reelle) **Zahlenfolge**.

Statt  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  schreibt man  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder kurz  $(a_n)$ .  
 $a_n = a(n)$  heißt  $n$ -tes **Folglied** dieser Zahlenfolge.

**Anmerkung:** Wie schon beim Induktionsprinzip kann man als Indexmenge auch jede andere Menge der Form  $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\}$  für festes  $n_0 \in \mathbb{Z}$  benutzen. Insbesondere ist  $\mathbb{N}_0$  zulässig.

Notation für diesen Fall:  $(a_n)_{n \geq n_0}$ .

Die Beschreibung von Folgen erfolgt in der Regel durch Angabe von **Bildungsgesetzen**.

**Explizites Bildungsgesetz:** Der Wert  $a_n$  wird mittels eines algebraischen Ausdrucks/einer Formel in Abhängigkeit von  $n$  angegeben (Funktionsvorschrift).

**Beispiel:** Die Bildungsvorschrift  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$  erzeugt die Folge

$$-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{36}, -\frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \dots$$

Das 42-te Folgenglied kann man direkt berechnen:  $a_{42} = (-1)^{42} \frac{1}{42^2} = \frac{1}{1764}$ .

Die Beschreibung von Folgen erfolgt in der Regel durch Angabe von **Bildungsgesetzen**.

**Explizites Bildungsgesetz:** Der Wert  $a_n$  wird mittels eines algebraischen Ausdrucks/einer Formel in Abhängigkeit von  $n$  angegeben (Funktionsvorschrift).

**Beispiel:** Die Bildungsvorschrift  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$  erzeugt die Folge

$$-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{36}, -\frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \dots$$

Das 42-te Folgenglied kann man direkt berechnen:  $a_{42} = (-1)^{42} \frac{1}{42^2} = \frac{1}{1764}$ .

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

Die Beschreibung von Folgen erfolgt in der Regel durch Angabe von **Bildungsgesetzen**.

**Explizites Bildungsgesetz:** Der Wert  $a_n$  wird mittels eines algebraischen Ausdrucks/einer Formel in Abhängigkeit von  $n$  angegeben (Funktionsvorschrift).

**Beispiel:** Die Bildungsvorschrift  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$  erzeugt die Folge

$$-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{36}, -\frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \dots$$

Das 42-te Folgenglied kann man direkt berechnen:  $a_{42} = (-1)^{42} \frac{1}{42^2} = \frac{1}{1764}$ .

Man gebe die ersten 7 Glieder der Folgen  $(\frac{1}{2^n})$  und  $(\sqrt[n]{n})$  (ggf. näherungsweise) an. Wie lautet das 1000-te Folgenglied?

Die Beschreibung von Folgen erfolgt in der Regel durch Angabe von **Bildungsgesetzen**.

**Explizites Bildungsgesetz:** Der Wert  $a_n$  wird mittels eines algebraischen Ausdrucks/einer Formel in Abhängigkeit von  $n$  angegeben (Funktionsvorschrift).

**Beispiel:** Die Bildungsvorschrift  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$  erzeugt die Folge

$$-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{36}, -\frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \dots$$

Das 42-te Folgenglied kann man direkt berechnen:  $a_{42} = (-1)^{42} \frac{1}{42^2} = \frac{1}{1764}$ .

Man gebe die ersten 7 Glieder der Folgen  $(\frac{1}{2^n})$  und  $(\sqrt[n]{n})$  (ggf. näherungsweise) an. Wie lautet das 1000-te Folgenglied?

Haben Sie's geschafft?

Die Beschreibung von Folgen erfolgt in der Regel durch Angabe von **Bildungsgesetzen**.

**Explizites Bildungsgesetz:** Der Wert  $a_n$  wird mittels eines algebraischen Ausdrucks/einer Formel in Abhängigkeit von  $n$  angegeben (Funktionsvorschrift).

**Beispiel:** Die Bildungsvorschrift  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$  erzeugt die Folge

$$-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{36}, -\frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \dots$$

Das 42-te Folgenglied kann man direkt berechnen:  $a_{42} = (-1)^{42} \frac{1}{42^2} = \frac{1}{1764}$ .

Man gebe die ersten 7 Glieder der Folgen  $(\frac{1}{2^n})$  und  $(\sqrt[n]{n})$  (ggf. näherungsweise) an. Wie lautet das 1000-te Folgenglied?

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

**Rekursives Bildungsgesetz:** Der Wert  $a_{n+1}$  wird in Abhängigkeit von  $a_n$  und  $n$  ausgedrückt. Zusätzlich wird  $a_1$  angegeben (vgl. Induktionsprinzip).

**Beispiel:** Die Rekursionsvorschrift  $a_{n+1} = a_n + n$  erzeugt die Folge

$$1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, \dots$$

Das Folgenglied  $a_{42} = 903$  über diese Vorschrift zu berechnen ist mühsam. (Später werden wir sehen, wie dies explizit besser geht).

**Rekursives Bildungsgesetz:** Der Wert  $a_{n+1}$  wird in Abhängigkeit von  $a_n$  und  $n$  ausgedrückt. Zusätzlich wird  $a_1$  angegeben (vgl. Induktionsprinzip).

**Beispiel:** Die Rekursionsvorschrift  $a_{n+1} = a_n + n$  erzeugt die Folge

$$1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, \dots$$

Das Folgenglied  $a_{42} = 903$  über diese Vorschrift zu berechnen ist mühsam. (Später werden wir sehen, wie dies explizit besser geht).

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

**Rekursives Bildungsgesetz:** Der Wert  $a_{n+1}$  wird in Abhängigkeit von  $a_n$  und  $n$  ausgedrückt. Zusätzlich wird  $a_1$  angegeben (vgl. Induktionsprinzip).

**Beispiel:** Die Rekursionsvorschrift  $a_{n+1} = a_n + n$  erzeugt die Folge

$$1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, \dots$$

Das Folgenglied  $a_{42} = 903$  über diese Vorschrift zu berechnen ist mühsam. (Später werden wir sehen, wie dies explizit besser geht).

Man gebe die ersten 7 Glieder der durch

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$$

gegebenen Folge an. Können Sie eine explizite Bildungsvorschrift finden?

**Rekursives Bildungsgesetz:** Der Wert  $a_{n+1}$  wird in Abhängigkeit von  $a_n$  und  $n$  ausgedrückt. Zusätzlich wird  $a_1$  angegeben (vgl. Induktionsprinzip).

**Beispiel:** Die Rekursionsvorschrift  $a_{n+1} = a_n + n$  erzeugt die Folge

$$1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, \dots$$

Das Folgenglied  $a_{42} = 903$  über diese Vorschrift zu berechnen ist mühsam. (Später werden wir sehen, wie dies explizit besser geht).

Man gebe die ersten 7 Glieder der durch

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$$

gegebenen Folge an. Können Sie eine explizite Bildungsvorschrift finden?

Haben Sie's geschafft?

**Rekursives Bildungsgesetz:** Der Wert  $a_{n+1}$  wird in Abhängigkeit von  $a_n$  und  $n$  ausgedrückt. Zusätzlich wird  $a_1$  angegeben (vgl. Induktionsprinzip).

**Beispiel:** Die Rekursionsvorschrift  $a_{n+1} = a_n + n$  erzeugt die Folge

$$1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, \dots$$

Das Folgenglied  $a_{42} = 903$  über diese Vorschrift zu berechnen ist mühsam. (Später werden wir sehen, wie dies explizit besser geht).

Man gebe die ersten 7 Glieder der durch

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$$

gegebenen Folge an. Können Sie eine explizite Bildungsvorschrift finden?

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

Gelegentlich greift man in Rekursionsformeln auch auf mehrere vorausgehende Glieder zurück. Drückt man dabei  $a_{n+m}$  über  $a_n, \dots, a_{n+m-1}$  aus, muss man auch  $m$  Startwerte angeben.

**Beispiel:** Die Rekursionsvorschrift für die **Fibonacci-Zahlen**

$$a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \geq 1,$$

erzeugt die Folge

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

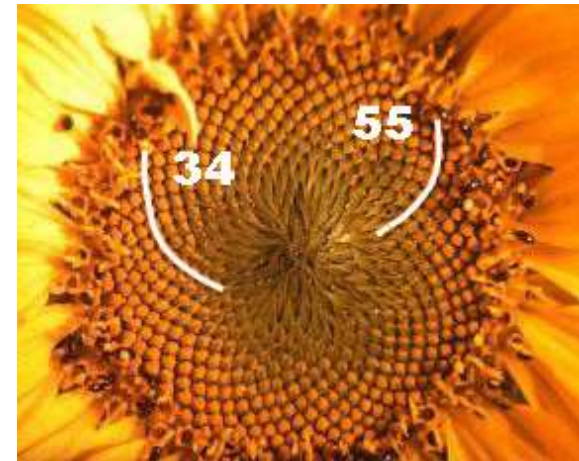
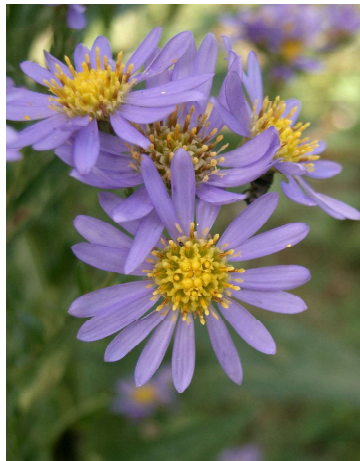
Diese Folge wurde von Leonardo da Pisa (Fibonacci), ca. 1180–1241, bei der mathematischen Modellierung einer Kaninchenpopulation entdeckt. Fibonacci gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters.

# Folgen

## Exkurs: Fibonacci-Zahlen in der Natur

Fibonacci-Zahlen finden sich häufig an Pflanzenteilen wieder. Grund ist die damit erreichbare hohe Lichtausbeute:

- Die Anzahl von Blütenblättern ist oft eine Fibonacci-Zahl (Ringelblume 13, Aster 21, Sonnenblume, Gänseblümchen 21/34/55/89)
- Die Anzahl gewisser Spiralen in Blütenkörbchen (Sonnenblumenkerne) oder bei Zapfen (Kiefer) ist häufig eine Fibonacci-Zahl



Bilder alle aus Wikimedia Commons, links: André Karwath aka Aka, Mitte: KENPEI, rechts: Dr. Helmut Haß, Koblenz / Wolfgang Beyer

**Anmerkung:** Die Umwandlung von expliziter in rekursive Vorschrift und zurück kann schwierig sein. Es gibt Folgen, bei denen nur eine Form oder sogar gar kein Bildungsgesetz bekannt ist.

**Beispiel:** Die (aufsteigende) Aufzählung aller Primzahlen ergibt die Folge

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots$$

Die Bestimmung etwa des 42-ten Folgenglieds (181) ist hier ohne eine betreffende Liste etwas anstrengend.

# Folgen

## Visualisierung von Folgen

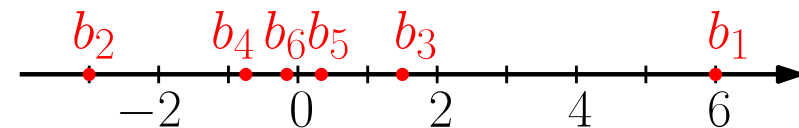
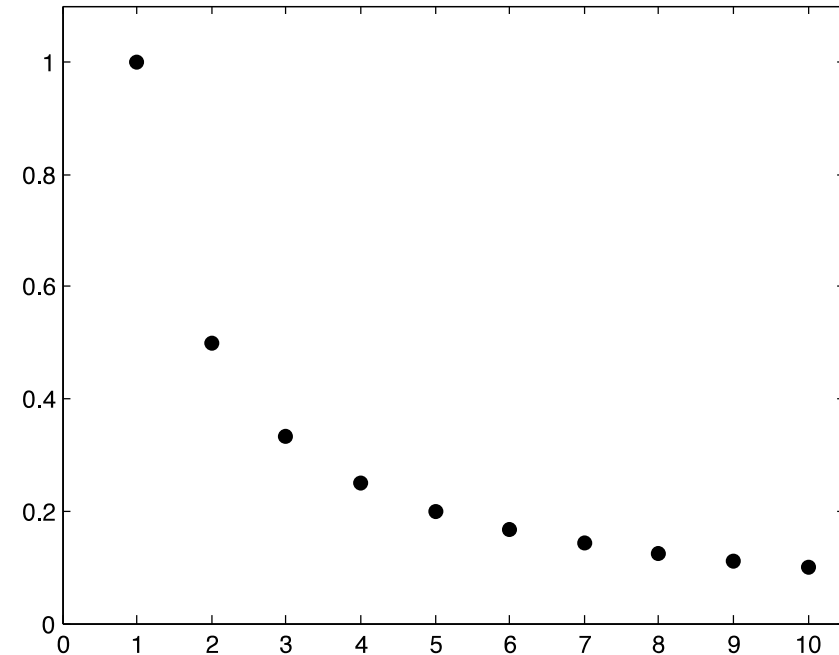
Darstellung des Graphen in der Ebene:

Der **Graph** einer Zahlenfolge  $(a_n)$  ergibt sich durch Abtragen der Folgenglieder  $a_n$  gegen die zugehörigen Indices  $n$ ; er besteht also aus der Punktmenge

$$\{(n, a_n) : n \in \mathbb{N}\}$$

in der Ebene.

Mitunter ist es auch zweckmäßig, lediglich die Folgenglieder auf dem Zahlenstrahl darzustellen:



### Definition 3.2

Eine Folge  $(a_n)$  heißt **beschränkt**, wenn es eine reelle Zahl  $C \geq 0$  gibt, so dass

$$|a_n| \leq C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

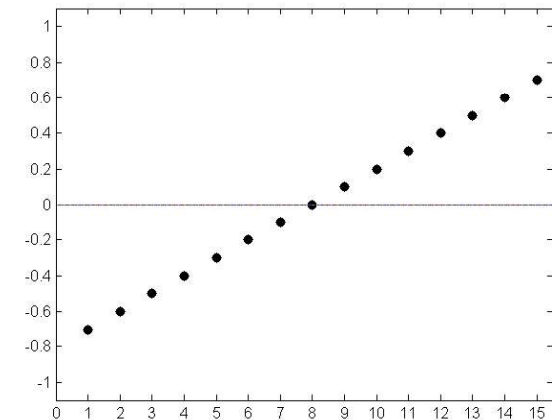
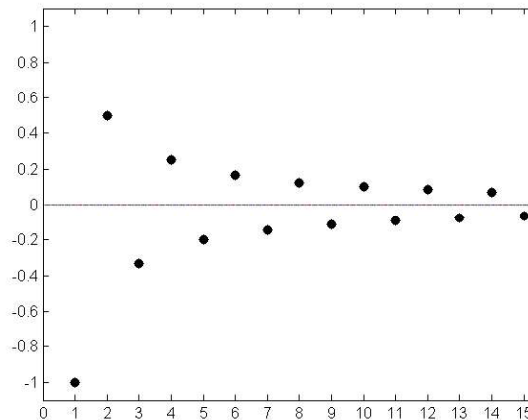
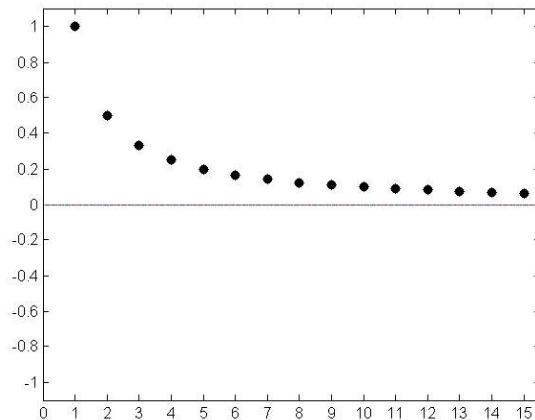
Eine Folge  $(a_n)$  heißt

- (streng) **monoton wachsend**, wenn  $a_n \leq a_{n+1}$  (bzw.  $a_n < a_{n+1}$ ) für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,
- (streng) **monoton fallend**, wenn  $a_n \geq a_{n+1}$  (bzw.  $a_n > a_{n+1}$ ) für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,
- (streng) **monoton**, falls sie (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

### Beispiele

- $\left(\frac{1}{n}\right)$  ist streng monoton fallend und beschränkt ( $C = 1$ ).
- $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$  ist nicht monoton, aber beschränkt ( $C = 1$ ).
- $\left(-\frac{4}{5} + \frac{1}{10}n\right)$  ist streng monoton wachsend und unbeschränkt.

Die Graphen dieser drei Folgen:



Oft ist es sinnvoll, für monotonen Wachstum anstelle von  $a_n \leq a_{n+1}$  eine der äquivalenten Ungleichungen

$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \quad \text{oder} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

zu verwenden (letztere natürlich nur, wenn alle  $a_n$  ungleich Null sind!).  
Für monoton fallende Folgen analog mit umgekehrtem Relationszeichen.

Oft ist es sinnvoll, für monotonen Wachstum anstelle von  $a_n \leq a_{n+1}$  eine der äquivalenten Ungleichungen

$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \quad \text{oder} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

zu verwenden (letztere natürlich nur, wenn alle  $a_n$  ungleich Null sind!).  
Für monoton fallende Folgen analog mit umgekehrtem Relationszeichen.

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

Oft ist es sinnvoll, für monotonen Wachstum anstelle von  $a_n \leq a_{n+1}$  eine der äquivalenten Ungleichungen

$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \quad \text{oder} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

zu verwenden (letztere natürlich nur, wenn alle  $a_n$  ungleich Null sind!).  
Für monoton fallende Folgen analog mit umgekehrtem Relationszeichen.

Untersuchen Sie die Folge  $\left(\frac{2^n}{5^{n+2}}\right)$  auf Monotonie und Beschränktheit. Führen Sie die Monotonieuntersuchung mit beiden o. a. Ungleichungen durch.

Oft ist es sinnvoll, für monotonen Wachstum anstelle von  $a_n \leq a_{n+1}$  eine der äquivalenten Ungleichungen

$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \quad \text{oder} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

zu verwenden (letztere natürlich nur, wenn alle  $a_n$  ungleich Null sind!). Für monoton fallende Folgen analog mit umgekehrtem Relationszeichen.

Untersuchen Sie die Folge  $\left(\frac{2^n}{5^{n+2}}\right)$  auf Monotonie und Beschränktheit. Führen Sie die Monotonieuntersuchung mit beiden o. a. Ungleichungen durch.

Haben Sie's geschafft?

Oft ist es sinnvoll, für monotonen Wachstum anstelle von  $a_n \leq a_{n+1}$  eine der äquivalenten Ungleichungen

$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \quad \text{oder} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

zu verwenden (letztere natürlich nur, wenn alle  $a_n$  ungleich Null sind!). Für monoton fallende Folgen analog mit umgekehrtem Relationszeichen.

Untersuchen Sie die Folge  $\left(\frac{2^n}{5^{n+2}}\right)$  auf Monotonie und Beschränktheit. Führen Sie die Monotonieuntersuchung mit beiden o. a. Ungleichungen durch.

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

### Definition 3.3 (Arithmetische Folge)

Eine Folge  $(a_n)$  heißt **arithmetische Folge**, falls die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder immer den gleichen Wert ergibt, d.h.

$$a_{n+1} - a_n = d$$

für eine Konstante  $d \in \mathbb{R}$ .

### Lemma 3.4

Sei  $(a_n)$  eine arithmetische Folge mit  $a_{n+1} - a_n = d$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Dann lautet die explizite Bildungsvorschrift:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d. \quad (3.1)$$

Eine arithmetische Folge ist also durch Angabe des ersten Folgenglieds  $a_1$  sowie der Differenz  $d$  eindeutig bestimmt.

# Folgen

## Beispiel

Mit  $a_1 = 3$  und  $d = -2$  erhält man die Folge

$$3, 1, -1, -3, -5, -7, -9, \dots$$

Die zugehörige Bildungsvorschrift lautet

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot (-2) = 5 - 2n.$$

# Folgen

## Beispiel

Mit  $a_1 = 3$  und  $d = -2$  erhält man die Folge

$$3, 1, -1, -3, -5, -7, -9, \dots$$

Die zugehörige Bildungsvorschrift lautet

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot (-2) = 5 - 2n.$$

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

Mit  $a_1 = 3$  und  $d = -2$  erhält man die Folge

$$3, 1, -1, -3, -5, -7, -9, \dots$$

Die zugehörige Bildungsvorschrift lautet

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot (-2) = 5 - 2n.$$

Geben Sie eine explizite Bildungsvorschrift zur arithmetischen Folge

$$2, 7, 12, 17, 22, 27, \dots$$

an. Berechnen Sie damit das 2018-te Folgenglied.

# Folgen

## Beispiel

Mit  $a_1 = 3$  und  $d = -2$  erhält man die Folge

$$3, 1, -1, -3, -5, -7, -9, \dots$$

Die zugehörige Bildungsvorschrift lautet

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot (-2) = 5 - 2n.$$

Geben Sie eine explizite Bildungsvorschrift zur arithmetischen Folge

$$2, 7, 12, 17, 22, 27, \dots$$

an. Berechnen Sie damit das 2018-te Folgenglied.

Haben Sie's geschafft?

# Folgen

## Beispiel

Mit  $a_1 = 3$  und  $d = -2$  erhält man die Folge

$$3, 1, -1, -3, -5, -7, -9, \dots$$

Die zugehörige Bildungsvorschrift lautet

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot (-2) = 5 - 2n.$$

Geben Sie eine explizite Bildungsvorschrift zur arithmetischen Folge

$$2, 7, 12, 17, 22, 27, \dots$$

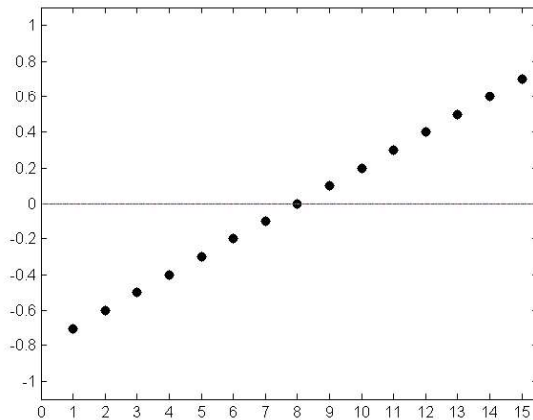
an. Berechnen Sie damit das 2018-te Folgenglied.

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

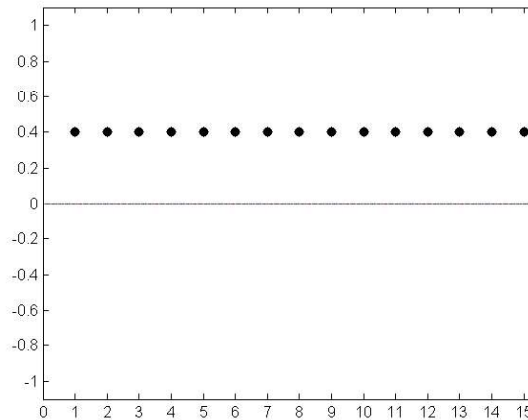
**Graphische Darstellung:** Nach Lemma 3.4 kann man eine arithmetische Folge als Einschränkung der affin linearen Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = a_1 + d(x - 1) = a_1 - d + dx$$

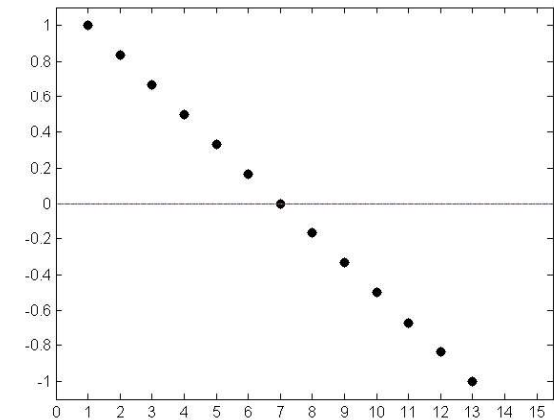
auf die natürlichen Zahlen auffassen. Die Punkte des Graphen liegen somit auf einer Geraden mit Anstieg  $d$ :



$$a_1 = -\frac{7}{10}, \quad d = \frac{1}{10}$$



$$a_1 = \frac{2}{5}, \quad d = 0$$



$$a_1 = 1, \quad d = -\frac{1}{6}$$

### Definition 3.5 (Geometrische Folge)

Eine Folge  $(a_n)$  heißt **geometrische Folge**, falls der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder stets denselben Wert ergibt, d.h.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

für eine Konstante  $q \in \mathbb{R}$ ,  $q \neq 0$ .

### Lemma 3.6

Sei  $(a_n)$  eine geometrische Folge mit  $a_{n+1}/a_n = q$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Dann lautet die explizite Bildungsvorschrift:

$$a_n = a_1 q^{n-1}. \quad (3.2)$$

Eine geometrische Folge ist also durch Angabe des ersten Folgenglieds  $a_1$  sowie des Quotienten  $q$  eindeutig bestimmt.

Mit  $a_1 = 1$  und  $q = \frac{1}{2}$  erhält man die Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$$

Die zugehörige Bildungsvorschrift lautet

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Mit  $a_1 = 1$  und  $q = \frac{1}{2}$  erhält man die Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$$

Die zugehörige Bildungsvorschrift lautet

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

Mit  $a_1 = 1$  und  $q = \frac{1}{2}$  erhält man die Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$$

Die zugehörige Bildungsvorschrift lautet

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Wie lautet die explizite Bildungsvorschrift zur geometrischen Folge

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{16}{3}, \frac{32}{3}, \frac{64}{3}, \dots?$$

Handelt es sich bei  $a_n = \frac{4 \cdot 3^{n-4}}{7^{n+1}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) um eine geometrische Folge?

Mit  $a_1 = 1$  und  $q = \frac{1}{2}$  erhält man die Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$$

Die zugehörige Bildungsvorschrift lautet

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Wie lautet die explizite Bildungsvorschrift zur geometrischen Folge

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{16}{3}, \frac{32}{3}, \frac{64}{3}, \dots?$$

Handelt es sich bei  $a_n = \frac{4 \cdot 3^{n-4}}{7^{n+1}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) um eine geometrische Folge?

Haben Sie's geschafft?

Mit  $a_1 = 1$  und  $q = \frac{1}{2}$  erhält man die Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$$

Die zugehörige Bildungsvorschrift lautet

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Wie lautet die explizite Bildungsvorschrift zur geometrischen Folge

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{16}{3}, \frac{32}{3}, \frac{64}{3}, \dots?$$

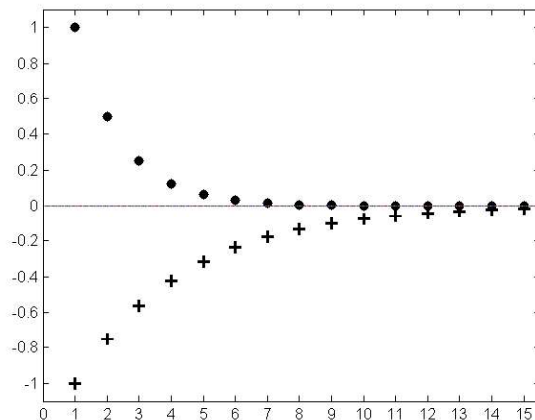
Handelt es sich bei  $a_n = \frac{4 \cdot 3^{n-4}}{7^{n+1}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) um eine geometrische Folge?

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

**Graphische Darstellung:** Nach Lemma 3.6 kann man für  $q > 0$  eine geometrische Folge als Einschränkung der Funktion

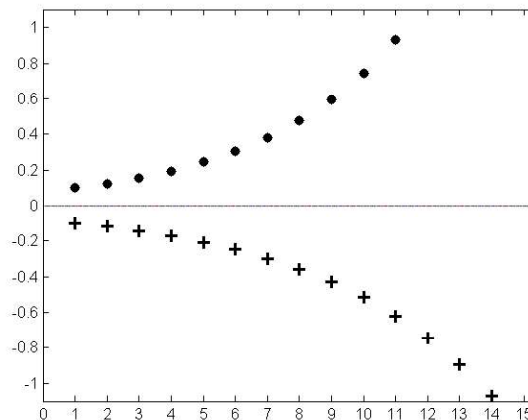
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = a_1 q^{x-1} = \frac{a_1}{q} q^x$$

auf die natürlichen Zahlen auffassen. Die Punkte des Graphen liegen für  $q > 0$  somit auf dem Graphen einer Exponentialfunktion mit Basis  $q$ .



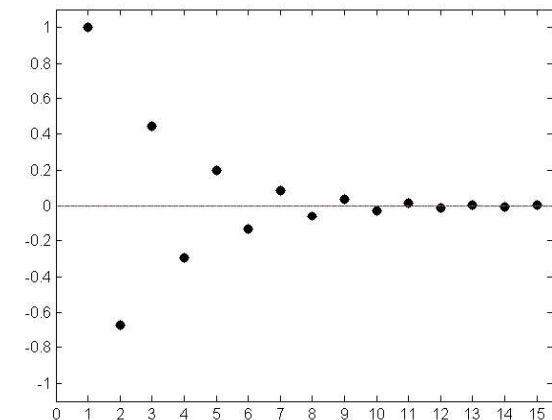
$$a_1 = 1, \quad q = \frac{1}{2} (\cdot)$$

$$a_1 = -1, \quad q = \frac{3}{4} (+)$$



$$a_1 = \frac{1}{10}, \quad q = 1.25 (\cdot)$$

$$a_1 = -\frac{1}{10}, \quad q = 1.2 (+)$$



$$a_1 = 1, \quad q = -\frac{2}{3}$$

Arithmetische Folgen werden häufig verwendet, wenn es um einen konstanten Zuwachs (**lineares** Wachstum) geht.

Geometrische Folgen benutzt man, wenn das Wachstum proportional zur Grundmenge erfolgt (**exponentielles** Wachstum).

Ein typisches Beispiel ist die Zinseszinsformel  $K_n = K_0(1 + p)^n$  ( $K_0$  Anfangskapital,  $p$  Zinssatz,  $K_n$  Kapital nach  $n$  Jahren).

# Folgen

## Folgen und Wachstumsprozesse

Arithmetische Folgen werden häufig verwendet, wenn es um einen konstanten Zuwachs (**lineares** Wachstum) geht.

Geometrische Folgen benutzt man, wenn das Wachstum proportional zur Grundmenge erfolgt (**exponentielles** Wachstum).

Ein typisches Beispiel ist die Zinseszinsformel  $K_n = K_0(1 + p)^n$  ( $K_0$  Anfangskapital,  $p$  Zinssatz,  $K_n$  Kapital nach  $n$  Jahren).

**Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!**

# Folgen

## Folgen und Wachstumsprozesse

Arithmetische Folgen werden häufig verwendet, wenn es um einen konstanten Zuwachs (**lineares** Wachstum) geht.

Geometrische Folgen benutzt man, wenn das Wachstum proportional zur Grundmenge erfolgt (**exponentielles** Wachstum).

Ein typisches Beispiel ist die Zinseszinsformel  $K_n = K_0(1 + p)^n$  ( $K_0$  Anfangskapital,  $p$  Zinssatz,  $K_n$  Kapital nach  $n$  Jahren).

An einer für Mitteleuropa typischen Stelle beträgt die Temperatur in 25 m Tiefe etwa  $10^\circ \text{C}$ . Schätzen Sie die Temperatur in 10 km Tiefe, indem Sie von einem Zuwachs von  $3^\circ \text{K}$  pro 100 m ausgehen.

# Folgen

## Folgen und Wachstumsprozesse

Arithmetische Folgen werden häufig verwendet, wenn es um einen konstanten Zuwachs (**lineares** Wachstum) geht.

Geometrische Folgen benutzt man, wenn das Wachstum proportional zur Grundmenge erfolgt (**exponentielles** Wachstum).

Ein typisches Beispiel ist die Zinseszinsformel  $K_n = K_0(1 + p)^n$  ( $K_0$  Anfangskapital,  $p$  Zinssatz,  $K_n$  Kapital nach  $n$  Jahren).

An einer für Mitteleuropa typischen Stelle beträgt die Temperatur in 25 m Tiefe etwa  $10^\circ \text{C}$ . Schätzen Sie die Temperatur in 10 km Tiefe, indem Sie von einem Zuwachs von  $3^\circ \text{K}$  pro 100 m ausgehen.

**Haben Sie's geschafft?**

# Folgen

## Folgen und Wachstumsprozesse

Arithmetische Folgen werden häufig verwendet, wenn es um einen konstanten Zuwachs (**lineares** Wachstum) geht.

Geometrische Folgen benutzt man, wenn das Wachstum proportional zur Grundmenge erfolgt (**exponentielles** Wachstum).

Ein typisches Beispiel ist die Zinseszinsformel  $K_n = K_0(1 + p)^n$  ( $K_0$  Anfangskapital,  $p$  Zinssatz,  $K_n$  Kapital nach  $n$  Jahren).

An einer für Mitteleuropa typischen Stelle beträgt die Temperatur in 25 m Tiefe etwa  $10^\circ \text{C}$ . Schätzen Sie die Temperatur in 10 km Tiefe, indem Sie von einem Zuwachs von  $3^\circ \text{K}$  pro 100 m ausgehen.

**Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!**  
**Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!**

# Folgen

## Folgen und Wachstumsprozesse

Arithmetische Folgen werden häufig verwendet, wenn es um einen konstanten Zuwachs (**lineares** Wachstum) geht.

Geometrische Folgen benutzt man, wenn das Wachstum proportional zur Grundmenge erfolgt (**exponentielles** Wachstum).

Ein typisches Beispiel ist die Zinseszinsformel  $K_n = K_0(1 + p)^n$  ( $K_0$  Anfangskapital,  $p$  Zinssatz,  $K_n$  Kapital nach  $n$  Jahren).

An einer für Mitteleuropa typischen Stelle beträgt die Temperatur in 25 m Tiefe etwa  $10^\circ \text{C}$ . Schätzen Sie die Temperatur in 10 km Tiefe, indem Sie von einem Zuwachs von  $3^\circ \text{K}$  pro 100 m ausgehen.

In einer Nährlösung befinden sich 1000 Einzeller, bei denen es durchschnittlich alle 20 min zur Teilung kommt. Schätzen Sie die Zahl der Einzeller nach 24 h bei ungebremstem Wachstum ohne Tod.

# Folgen

## Folgen und Wachstumsprozesse

Arithmetische Folgen werden häufig verwendet, wenn es um einen konstanten Zuwachs (**lineares** Wachstum) geht.

Geometrische Folgen benutzt man, wenn das Wachstum proportional zur Grundmenge erfolgt (**exponentielles** Wachstum).

Ein typisches Beispiel ist die Zinseszinsformel  $K_n = K_0(1 + p)^n$  ( $K_0$  Anfangskapital,  $p$  Zinssatz,  $K_n$  Kapital nach  $n$  Jahren).

An einer für Mitteleuropa typischen Stelle beträgt die Temperatur in 25 m Tiefe etwa  $10^\circ \text{C}$ . Schätzen Sie die Temperatur in 10 km Tiefe, indem Sie von einem Zuwachs von  $3^\circ \text{K}$  pro 100 m ausgehen.

In einer Nährlösung befinden sich 1000 Einzeller, bei denen es durchschnittlich alle 20 min zur Teilung kommt. Schätzen Sie die Zahl der Einzeller nach 24 h bei ungebremstem Wachstum ohne Tod.

**Haben Sie's geschafft?**

# Folgen

## Folgen und Wachstumsprozesse

Arithmetische Folgen werden häufig verwendet, wenn es um einen konstanten Zuwachs (**lineares** Wachstum) geht.

Geometrische Folgen benutzt man, wenn das Wachstum proportional zur Grundmenge erfolgt (**exponentielles** Wachstum).

Ein typisches Beispiel ist die Zinseszinsformel  $K_n = K_0(1 + p)^n$  ( $K_0$  Anfangskapital,  $p$  Zinssatz,  $K_n$  Kapital nach  $n$  Jahren).

An einer für Mitteleuropa typischen Stelle beträgt die Temperatur in 25 m Tiefe etwa  $10^\circ \text{C}$ . Schätzen Sie die Temperatur in 10 km Tiefe, indem Sie von einem Zuwachs von  $3^\circ \text{K}$  pro 100 m ausgehen.

In einer Nährlösung befinden sich 1000 Einzeller, bei denen es durchschnittlich alle 20 min zur Teilung kommt. Schätzen Sie die Zahl der Einzeller nach 24 h bei ungebremstem Wachstum ohne Tod.

**Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!**

# Folgen

## Folgen und Wachstumsprozesse

Arithmetische Folgen werden häufig verwendet, wenn es um einen konstanten Zuwachs (**lineares** Wachstum) geht.

Geometrische Folgen benutzt man, wenn das Wachstum proportional zur Grundmenge erfolgt (**exponentielles** Wachstum).

Ein typisches Beispiel ist die Zinseszinsformel  $K_n = K_0(1 + p)^n$  ( $K_0$  Anfangskapital,  $p$  Zinssatz,  $K_n$  Kapital nach  $n$  Jahren).

An einer für Mitteleuropa typischen Stelle beträgt die Temperatur in 25 m Tiefe etwa  $10^\circ \text{C}$ . Schätzen Sie die Temperatur in 10 km Tiefe, indem Sie von einem Zuwachs von  $3^\circ \text{K}$  pro 100 m ausgehen.

In einer Nährlösung befinden sich 1000 Einzeller, bei denen es durchschnittlich alle 20 min zur Teilung kommt. Schätzen Sie die Zahl der Einzeller nach 24 h bei ungebremstem Wachstum ohne Tod.

Aufgaben auf diesem Frame frei nach Bigalke/Köhler: Mathematik, Band 1, Analysis.

- Neben arithmetischen und geometrischen Folgen spricht man von einer **harmonischen Folge**, wenn die Kehrwerte der Folgenglieder eine arithmetische Folge bilden (und von Null verschieden sind).  
Bekanntestes Beispiel ist die harmonische Folge  $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Die Bezeichnungen lehnen sich womöglich an die Tatsache an, dass bei arithmetischen, geometrischen und harmonischen Folgen jedes Folgenglied (ab dem zweiten) das arithmetische, geometrische bzw. harmonische Mittel seiner beiden Nachbarn bildet.
- Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel zweier positiver Zahlen  $a, b$  sind jeweils definiert durch

$$\mu_a = \frac{a + b}{2}, \quad \mu_g = \sqrt{ab}, \quad \mu_h = \frac{1}{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}.$$

( $\mu_a$  ist natürlich für beliebige reelle Zahlen definiert.)

Die entsprechenden Mittelwerte für  $n > 2$  Zahlen sind analog definiert.

Es gilt stets  $\mu_h \leq \mu_g \leq \mu_a$ .

## ③ Folgen und Reihen

3.1 Folgen

3.2 Grenzwerte und Konvergenz

3.3 Unendliche Reihen

# Grenzwerte und Konvergenz

In einigen unserer Beispiele konnten wir feststellen, dass sich die Folgenglieder für große  $n$  immer weiter einer festen Zahl annähern. Mathematisch wird dies mit den Begriffen **Konvergenz** und **Grenzwert** beschrieben.

Konvergenz ist ein grundlegender Begriff der Analysis. Der Grenzwertbegriff in seiner modernen Form wurde erstmals durch A.-L. Cauchy formuliert.



Augustin-Louis Cauchy (1789-1857),  
französischer Mathematiker,  
entwickelte u. a. die durch Leibniz und Newton  
aufgestellten Grundlagen der Analysis weiter.

### Definition 3.7 (Grenzwert)

Eine Zahl  $a$  heißt **Grenzwert** der Folge  $(a_n)$ , wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  ein Index  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Besitzt die Folge  $(a_n)$  einen Grenzwert, so heißt sie **konvergent**, andernfalls **divergent**.

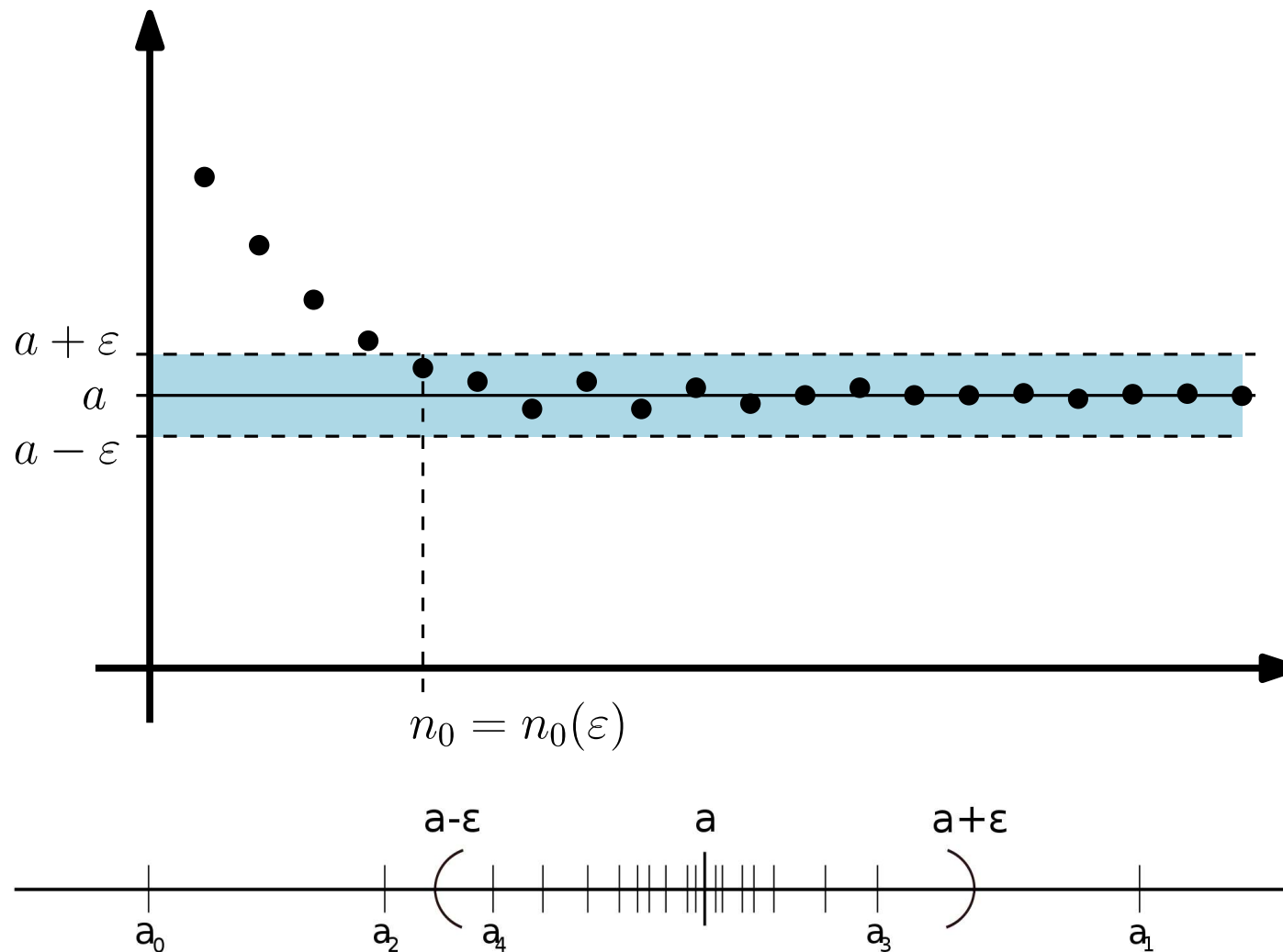
#### Schreibweisen:

- $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
- $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  oder kürzer:  $a_n \rightarrow a$ .

Zum besseren Verständnis: Denken Sie vor allem an **kleine**  $\epsilon > 0$ .

# Grenzwerte und Konvergenz

Graphische und sprachliche Illustration des Begriffs



Für hinreichend großes  $n$  haben Folgenglieder  $a_n$  und Grenzwert  $a$  Abstand  $\leq \epsilon$ .

(Bild unten: Wikimedia Commons; Matthias Vogelgesang (Youthenergy))

# Grenzwerte und Konvergenz

## Beispiele, Eindeutigkeit

### Beispiele:

- $a_n = c \rightarrow c$ : Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Dann gilt  $|a_n - c| = 0 < \epsilon$  für alle  $n$ .
- $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ : Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Wähle ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n_0 > 1/\epsilon$ , dann gilt:

$$|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

# Grenzwerte und Konvergenz

## Beispiele, Eindeutigkeit

### Beispiele:

- $a_n = c \rightarrow c$ : Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Dann gilt  $|a_n - c| = 0 < \epsilon$  für alle  $n$ .
- $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ : Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Wähle ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n_0 > 1/\epsilon$ , dann gilt:

$$|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Hier haben wir eine tiefe Wahrheit benutzt: dass es nämlich zu  $1/\epsilon$  eine größere natürliche Zahl  $n_0$  gibt. Der Rest ist Rechnen mit Ungleichungen!

# Grenzwerte und Konvergenz

## Beispiele, Eindeutigkeit

### Beispiele:

- $a_n = c \rightarrow c$ : Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Dann gilt  $|a_n - c| = 0 < \epsilon$  für alle  $n$ .
- $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ : Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Wähle ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n_0 > 1/\epsilon$ , dann gilt:

$$|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

- $a_n = \frac{n^2+1}{n^2} \rightarrow 1$ : Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Wähle ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n_0 > 1/\sqrt{\epsilon}$ , dann gilt:

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n^2 + 1}{n^2} - 1 \right| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)^2} = \epsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

## Satz 3.8

*Der Grenzwert einer konvergenten Zahlenfolge ist eindeutig bestimmt.*

### Definition 3.9 (Nullfolge)

Eine Folge  $(a_n)$  heißt **Nullfolge**, wenn  $a_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Nullfolgen können für eine weitere Charakterisierung von Grenzwerten benutzt werden:

### Lemma 3.10

*Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist genau dann konvergent mit Grenzwert  $a$ , wenn  $(a_n - a)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist.*

Dabei vereinbaren wir, dass arithmetische Operationen auf Folgen immer gliedweise zu verstehen sind.

**Beispiel:**  $a_n = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ , denn  $a_n - 1 = \frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

# Grenzwerte und Konvergenz

Bezug zu Monotonie und Beschränktheit

## Satz 3.11

- (a) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
- (b) *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.*

## Satz 3.11

- (a) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
- (b) *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.*

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

# Grenzwerte und Konvergenz

Bezug zu Monotonie und Beschränktheit

## Satz 3.11

- (a) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
- (b) *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.*

Finden Sie eine Folge die konvergent, aber nicht monoton ist.

# Grenzwerte und Konvergenz

Bezug zu Monotonie und Beschränktheit

## Satz 3.11

- (a) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
- (b) *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.*

Finden Sie eine Folge die konvergent, aber nicht monoton ist.

Haben Sie's geschafft?

# Grenzwerte und Konvergenz

Bezug zu Monotonie und Beschränktheit

## Satz 3.11

- (a) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
- (b) *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.*

Finden Sie eine Folge die konvergent, aber nicht monoton ist.

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

# Grenzwerte und Konvergenz

Bezug zu Monotonie und Beschränktheit

## Satz 3.11

- (a) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
- (b) *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.*

Finden Sie eine Folge die konvergent, aber nicht monoton ist.

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

# Grenzwerte und Konvergenz

Bezug zu Monotonie und Beschränktheit

## Satz 3.11

- (a) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
- (b) *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.*

Finden Sie eine Folge die konvergent, aber nicht monoton ist.

Beweisen Sie Satz 3.11. Sie benötigen nur die Grenzwertdefinition und die Tatsache, dass jede beschränkte Menge in  $\mathbb{R}$  ein Supremum besitzt.

# Grenzwerte und Konvergenz

Bezug zu Monotonie und Beschränktheit

## Satz 3.11

- (a) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
- (b) *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.*

Finden Sie eine Folge die konvergent, aber nicht monoton ist.

Beweisen Sie Satz 3.11. Sie benötigen nur die Grenzwertdefinition und die Tatsache, dass jede beschränkte Menge in  $\mathbb{R}$  ein Supremum besitzt.

Haben Sie's geschafft?

# Grenzwerte und Konvergenz

Bezug zu Monotonie und Beschränktheit

## Satz 3.11

- (a) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
- (b) *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.*

Finden Sie eine Folge die konvergent, aber nicht monoton ist.

Beweisen Sie Satz 3.11. Sie benötigen nur die Grenzwertdefinition und die Tatsache, dass jede beschränkte Menge in  $\mathbb{R}$  ein Supremum besitzt.

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

# Grenzwerte und Konvergenz

Bezug zu Monotonie und Beschränktheit

## Satz 3.11

- (a) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
- (b) *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.*

Finden Sie eine Folge die konvergent, aber nicht monoton ist.

Beweisen Sie Satz 3.11. Sie benötigen nur die Grenzwertdefinition und die Tatsache, dass jede beschränkte Menge in  $\mathbb{R}$  ein Supremum besitzt.

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

# Grenzwerte und Konvergenz

Bezug zu Monotonie und Beschränktheit

## Satz 3.11

- (a) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
- (b) *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.*

Finden Sie eine Folge die konvergent, aber nicht monoton ist.

Beweisen Sie Satz 3.11. Sie benötigen nur die Grenzwertdefinition und die Tatsache, dass jede beschränkte Menge in  $\mathbb{R}$  ein Supremum besitzt.

Begründen Sie mit Satz 3.11, dass die Folge  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  für  $q > 1$  divergiert.

# Grenzwerte und Konvergenz

Bezug zu Monotonie und Beschränktheit

## Satz 3.11

- (a) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
- (b) *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.*

Finden Sie eine Folge die konvergent, aber nicht monoton ist.

Beweisen Sie Satz 3.11. Sie benötigen nur die Grenzwertdefinition und die Tatsache, dass jede beschränkte Menge in  $\mathbb{R}$  ein Supremum besitzt.

Begründen Sie mit Satz 3.11, dass die Folge  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  für  $q > 1$  divergiert.

Haben Sie's geschafft?

# Grenzwerte und Konvergenz

Bezug zu Monotonie und Beschränktheit

## Satz 3.11

- (a) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
- (b) *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.*

Finden Sie eine Folge die konvergent, aber nicht monoton ist.

Beweisen Sie Satz 3.11. Sie benötigen nur die Grenzwertdefinition und die Tatsache, dass jede beschränkte Menge in  $\mathbb{R}$  ein Supremum besitzt.

Begründen Sie mit Satz 3.11, dass die Folge  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  für  $q > 1$  divergiert.

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

### Definition 3.12 (Teilfolge)

Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Zahlenfolge und  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} = (n_1, n_2, \dots)$  eine streng wachsende Folge natürlicher Zahlen, so heißt die Folge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  **Teilfolge** von  $(a_n)$ .

### Satz 3.13

*Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert ebenfalls gegen denselben Grenzwert.*

Der folgende, Bernhard Bolzano (1781–1848) und Karl Weierstraß (1815–1897) zugeschriebene Satz ist ein einfaches Beispiel einer **Kompaktheitseigenschaft**:

### Satz 3.14 (Bolzano–Weierstraß)

*Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Eng im Zusammenhang mit konvergenten Folgen steht folgender Begriff:

### Definition 3.15 (Cauchy-Folge)

Eine Folge  $(a_n)$  heißt **Cauchy-Folge**, wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \text{für alle } n, m \geq n_0. \quad (3.3)$$

Bei einer Cauchy-Folge liegen also die Glieder für hinreichend große Indizes beliebig eng beisammen.

Der Bezug zur Konvergenz von **reellen** Zahlenfolgen lautet:

### Satz 3.16 (Cauchysches Konvergenzkriterium)

*Eine **reelle** Zahlenfolge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

# Grenzwerte und Konvergenz

## Cauchy-Folgen

Die Konvergenz von Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$  resultiert aus der Vollständigkeit. Die umgekehrte Aussage benötigt jedoch nur die Definition des Grenzwerts:

# Grenzwerte und Konvergenz

## Cauchy-Folgen

Die Konvergenz von Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$  resultiert aus der Vollständigkeit. Die umgekehrte Aussage benötigt jedoch nur die Definition des Grenzwerts:

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

# Grenzwerte und Konvergenz

## Cauchy-Folgen

Die Konvergenz von Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$  resultiert aus der Vollständigkeit. Die umgekehrte Aussage benötigt jedoch nur die Definition des Grenzwerts:

Zeigen Sie, dass jede konvergente Zahlenfolge  $(a_n)$  die Cauchy-Eigenschaft (3.3) besitzt.

# Grenzwerte und Konvergenz

## Cauchy-Folgen

Die Konvergenz von Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$  resultiert aus der Vollständigkeit. Die umgekehrte Aussage benötigt jedoch nur die Definition des Grenzwerts:

Zeigen Sie, dass jede konvergente Zahlenfolge  $(a_n)$  die Cauchy-Eigenschaft (3.3) besitzt.

Haben Sie's geschafft?

# Grenzwerte und Konvergenz

## Cauchy-Folgen

Die Konvergenz von Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$  resultiert aus der Vollständigkeit. Die umgekehrte Aussage benötigt jedoch nur die Definition des Grenzwerts:

Zeigen Sie, dass jede konvergente Zahlenfolge  $(a_n)$  die Cauchy-Eigenschaft (3.3) besitzt.

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

# Grenzwerte und Konvergenz

## Cauchy-Folgen

Die Konvergenz von Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$  resultiert aus der Vollständigkeit. Die umgekehrte Aussage benötigt jedoch nur die Definition des Grenzwerts:

Zeigen Sie, dass jede konvergente Zahlenfolge  $(a_n)$  die Cauchy-Eigenschaft (3.3) besitzt.

Der Nutzen von Satz 3.16 liegt nicht in der konkreten Berechnung von Grenzwerten, sondern eher in theoretischen Betrachtungen und Entscheidungen über das Konvergenzverhalten einer Folge an sich.

# Grenzwerte und Konvergenz

## Cauchy-Folgen

Die Konvergenz von Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$  resultiert aus der Vollständigkeit. Die umgekehrte Aussage benötigt jedoch nur die Definition des Grenzwerts:

Zeigen Sie, dass jede konvergente Zahlenfolge  $(a_n)$  die Cauchy-Eigenschaft (3.3) besitzt.

Der Nutzen von Satz 3.16 liegt nicht in der konkreten Berechnung von Grenzwerten, sondern eher in theoretischen Betrachtungen und Entscheidungen über das Konvergenzverhalten einer Folge an sich.

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

# Grenzwerte und Konvergenz

## Cauchy-Folgen

Die Konvergenz von Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$  resultiert aus der Vollständigkeit. Die umgekehrte Aussage benötigt jedoch nur die Definition des Grenzwerts:

Zeigen Sie, dass jede konvergente Zahlenfolge  $(a_n)$  die Cauchy-Eigenschaft (3.3) besitzt.

Der Nutzen von Satz 3.16 liegt nicht in der konkreten Berechnung von Grenzwerten, sondern eher in theoretischen Betrachtungen und Entscheidungen über das Konvergenzverhalten einer Folge an sich.

Begründen Sie mit Satz 3.16, dass eine arithmetische Folge mit  $d \neq 0$  nicht konvergent sein kann.

# Grenzwerte und Konvergenz

## Cauchy-Folgen

Die Konvergenz von Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$  resultiert aus der Vollständigkeit. Die umgekehrte Aussage benötigt jedoch nur die Definition des Grenzwerts:

Zeigen Sie, dass jede konvergente Zahlenfolge  $(a_n)$  die Cauchy-Eigenschaft (3.3) besitzt.

Der Nutzen von Satz 3.16 liegt nicht in der konkreten Berechnung von Grenzwerten, sondern eher in theoretischen Betrachtungen und Entscheidungen über das Konvergenzverhalten einer Folge an sich.

Begründen Sie mit Satz 3.16, dass eine arithmetische Folge mit  $d \neq 0$  nicht konvergent sein kann.

Haben Sie's geschafft?

# Grenzwerte und Konvergenz

## Cauchy-Folgen

Die Konvergenz von Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$  resultiert aus der Vollständigkeit. Die umgekehrte Aussage benötigt jedoch nur die Definition des Grenzwerts:

Zeigen Sie, dass jede konvergente Zahlenfolge  $(a_n)$  die Cauchy-Eigenschaft (3.3) besitzt.

Der Nutzen von Satz 3.16 liegt nicht in der konkreten Berechnung von Grenzwerten, sondern eher in theoretischen Betrachtungen und Entscheidungen über das Konvergenzverhalten einer Folge an sich.

Begründen Sie mit Satz 3.16, dass eine arithmetische Folge mit  $d \neq 0$  nicht konvergent sein kann.

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

# Grenzwerte und Konvergenz

## Rechnen mit konvergenten Folgen

Wir beginnen mit einigen Vergleichskriterien für Grenzwerte.

### Satz 3.17

*Gilt  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$ , und ist fast immer  $a_n \leq b_n$  (d. h. durchweg ab einem bestimmten Index), so gilt auch  $a \leq b$ .*

**Achtung:** Aus  $a_n < b_n$  folgt dagegen i. a. **nicht** die strenge Beziehung  $a < b$ . Betrachte zum Beispiel die Folgen  $a_n = 1 - \frac{1}{n}$  und  $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ .

### Folgerung 3.18 (Sandwichsatz)

*Gilt  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow a$ , und gilt ferner fast immer  $a_n \leq c_n \leq b_n$ , so gilt auch  $c_n \rightarrow a$ .*

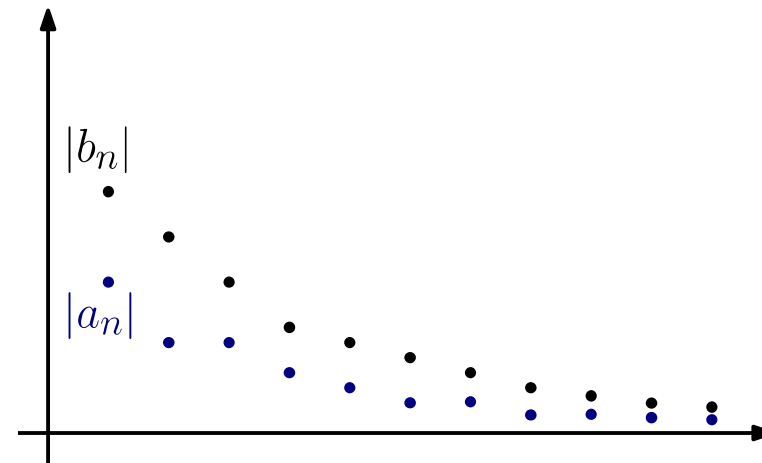
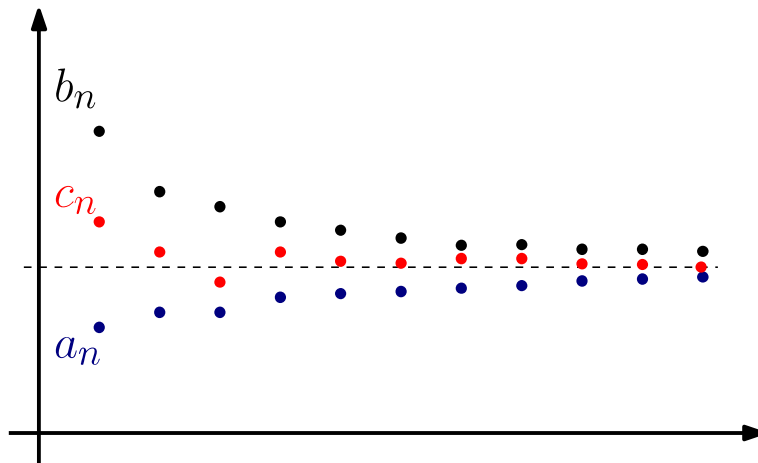
# Grenzwerte und Konvergenz

## Rechnen mit konvergenten Folgen

### Folgerung 3.19

Ist  $(b_n)$  Nullfolge und gilt fast immer  $|a_n| \leq |b_n|$ , so ist auch  $(a_n)$  eine Nullfolge.

Visualisierungen zu Folgerung 3.18 und 3.19:



Für Nullfolgen gilt noch ein weiteres Ergebnis:

### Satz 3.20

Ist  $(a_n)$  Nullfolge und  $(b_n)$  beschränkt, so ist  $(a_n b_n)$  wieder eine Nullfolge.

# Grenzwerte und Konvergenz

## Rechnen mit konvergenten Folgen

Für die Berechnung von Grenzwerten hilft meist auch folgender Satz:

### Satz 3.21 (Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  Zahlenfolgen mit  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ . Dann gilt

(1)  $a_n + b_n \rightarrow a + b,$

(2)  $a_n - b_n \rightarrow a - b,$

(3)  $a_n b_n \rightarrow ab,$

(4)  $\lambda a_n \rightarrow \lambda a$  für jede Konstante  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Ist weiterhin  $b \neq 0$ , so gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $b_n \neq 0$  ( $n \geq n_0$ ). Die Folge  $(b_n)_{n \geq n_0}$  konvergiert mit

(5)  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}.$

**Beispiel:** Aus  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  folgt z. B.  $2 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^3} \rightarrow 2 + 5 \cdot 0 - 3 \cdot 0^3 = 2.$

# Grenzwerte und Konvergenz

## Rechnen mit konvergenten Folgen

Für die Berechnung von Grenzwerten hilft meist auch folgender Satz:

### Satz 3.21 (Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  Zahlenfolgen mit  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ . Dann gilt

(1)  $a_n + b_n \rightarrow a + b,$

(2)  $a_n - b_n \rightarrow a - b,$

(3)  $a_n b_n \rightarrow ab,$

(4)  $\lambda a_n \rightarrow \lambda a$  für jede Konstante  $\lambda \in \mathbb{R}.$

Ist weiterhin  $b \neq 0$ , so gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $b_n \neq 0$  ( $n \geq n_0$ ). Die Folge  $(b_n)_{n \geq n_0}$  konvergiert mit

(5)  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}.$

**Beispiel:** Aus  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  folgt z. B.  $2 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^3} \rightarrow 2 + 5 \cdot 0 - 3 \cdot 0^3 = 2.$

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

Für die Berechnung von Grenzwerten hilft meist auch folgender Satz:

### Satz 3.21 (Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  Zahlenfolgen mit  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ . Dann gilt

(1)  $a_n + b_n \rightarrow a + b,$

(2)  $a_n - b_n \rightarrow a - b,$

(3)  $a_n b_n \rightarrow ab,$

(4)  $\lambda a_n \rightarrow \lambda a$  für jede Konstante  $\lambda \in \mathbb{R}.$

Ist weiterhin  $b \neq 0$ , so gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $b_n \neq 0$  ( $n \geq n_0$ ). Die Folge  $(b_n)_{n \geq n_0}$  konvergiert mit

(5)  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}.$

**Beispiel:** Aus  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  folgt z. B.  $2 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^3} \rightarrow 2 + 5 \cdot 0 - 3 \cdot 0^3 = 2.$

Man beweise Aussage (1) mit Hilfe der Grenzwertdefinition.

Für die Berechnung von Grenzwerten hilft meist auch folgender Satz:

### Satz 3.21 (Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  Zahlenfolgen mit  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ . Dann gilt

(1)  $a_n + b_n \rightarrow a + b,$

(2)  $a_n - b_n \rightarrow a - b,$

(3)  $a_n b_n \rightarrow ab,$

(4)  $\lambda a_n \rightarrow \lambda a$  für jede Konstante  $\lambda \in \mathbb{R}.$

Ist weiterhin  $b \neq 0$ , so gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $b_n \neq 0$  ( $n \geq n_0$ ). Die Folge  $(b_n)_{n \geq n_0}$  konvergiert mit

(5)  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}.$

**Beispiel:** Aus  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  folgt z. B.  $2 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^3} \rightarrow 2 + 5 \cdot 0 - 3 \cdot 0^3 = 2.$

Man beweise Aussage (1) mit Hilfe der Grenzwertdefinition.

Für die Berechnung von Grenzwerten hilft meist auch folgender Satz:

### Satz 3.21 (Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  Zahlenfolgen mit  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ . Dann gilt

(1)  $a_n + b_n \rightarrow a + b$ ,

(2)  $a_n - b_n \rightarrow a - b$ ,

(3)  $a_n b_n \rightarrow ab$ ,

(4)  $\lambda a_n \rightarrow \lambda a$  für jede Konstante  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Ist weiterhin  $b \neq 0$ , so gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $b_n \neq 0$  ( $n \geq n_0$ ). Die Folge  $(b_n)_{n \geq n_0}$  konvergiert mit

(5)  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ .

**Beispiel:** Aus  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  folgt z. B.  $2 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^3} \rightarrow 2 + 5 \cdot 0 - 3 \cdot 0^3 = 2$ .

Man beweise Aussage (1) mit Hilfe der Grenzwertdefinition.

### Definition 3.22

Eine Folge  $(a_n)$  heißt **bestimmt divergent gegen  $+\infty$**  (Schreibweise  $a_n \rightarrow \infty$  oder  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ), wenn zu jeder Zahl  $C \in \mathbb{R}$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so dass

$$a_n \geq C \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Entsprechend heißt  $(a_n)$  **bestimmt divergent gegen  $-\infty$**  (Schreibweise  $a_n \rightarrow -\infty$  oder  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ), wenn zu jeder Zahl  $C \in \mathbb{R}$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so dass

$$a_n \leq C \quad \text{für } n \geq n_0.$$

**Beispiele:** Es gilt  $n + 4 \rightarrow +\infty$  und  $-n^2 + 3n \rightarrow -\infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

# Grenzwerte und Konvergenz

## Bestimmte Divergenz

Einige Rechenregeln aus Satz 3.21 lassen sich teilweise auf bestimmt divergente Folgen übertragen. Dazu definiert man:

- $c + \infty = \infty + \infty = \infty$  für  $c \in \mathbb{R}$ ,
- $c - \infty = -\infty - \infty = -\infty$  für  $c \in \mathbb{R}$ ,
- $c \cdot \infty = \infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$  für  $c > 0$ ,
- $c \cdot \infty = (-\infty) \cdot \infty = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$  für  $c < 0$ ,
- $c \cdot (-\infty) = -\infty$  für  $c > 0$ ,
- $c \cdot (-\infty) = \infty$  für  $c < 0$ ,
- $\frac{c}{\pm\infty} = 0$  für  $c \in \mathbb{R}$ .

**Achtung:** Ausdrücke wie  $\infty - \infty$ ,  $-\infty + \infty$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ,  $0 \cdot (\pm\infty)$ ,  $\frac{\pm\infty}{0}$  sind unbestimmt und können nicht sinnvoll definiert werden.

# Grenzwerte und Konvergenz

## Bestimmte Divergenz

Einige Rechenregeln aus Satz 3.21 lassen sich teilweise auf bestimmt divergente Folgen übertragen. Dazu definiert man:

- $c + \infty = \infty + \infty = \infty$  für  $c \in \mathbb{R}$ ,
- $c - \infty = -\infty - \infty = -\infty$  für  $c \in \mathbb{R}$ ,
- $c \cdot \infty = \infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$  für  $c > 0$ ,
- $c \cdot \infty = (-\infty) \cdot \infty = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$  für  $c < 0$ ,
- $c \cdot (-\infty) = -\infty$  für  $c > 0$ ,
- $c \cdot (-\infty) = \infty$  für  $c < 0$ ,
- $\frac{c}{\pm\infty} = 0$  für  $c \in \mathbb{R}$ .

**Achtung:** Ausdrücke wie  $\infty - \infty$ ,  $-\infty + \infty$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ,  $0 \cdot (\pm\infty)$ ,  $\frac{\pm\infty}{0}$  sind unbestimmt und können nicht sinnvoll definiert werden.

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

# Grenzwerte und Konvergenz

## Bestimmte Divergenz

Einige Rechenregeln aus Satz 3.21 lassen sich teilweise auf bestimmt divergente Folgen übertragen. Dazu definiert man:

- $c + \infty = \infty + \infty = \infty$  für  $c \in \mathbb{R}$ ,
- $c - \infty = -\infty - \infty = -\infty$  für  $c \in \mathbb{R}$ ,
- $c \cdot \infty = \infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$  für  $c > 0$ ,
- $c \cdot \infty = (-\infty) \cdot \infty = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$  für  $c < 0$ ,
- $c \cdot (-\infty) = -\infty$  für  $c > 0$ ,
- $c \cdot (-\infty) = \infty$  für  $c < 0$ ,
- $\frac{c}{\pm\infty} = 0$  für  $c \in \mathbb{R}$ .

**Achtung:** Ausdrücke wie  $\infty - \infty$ ,  $-\infty + \infty$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ,  $0 \cdot (\pm\infty)$ ,  $\frac{\pm\infty}{0}$  sind unbestimmt und können nicht sinnvoll definiert werden.

Man finde Beispiele für Folgen vom Typ „ $0 \cdot \infty$ “ mit Grenzwert  $0, 1, -42$ , bestimmter Divergenz in beide Richtungen sowie nicht bestimmter Divergenz.

# Grenzwerte und Konvergenz

## Bestimmte Divergenz

Einige Rechenregeln aus Satz 3.21 lassen sich teilweise auf bestimmt divergente Folgen übertragen. Dazu definiert man:

- $c + \infty = \infty + \infty = \infty$  für  $c \in \mathbb{R}$ ,
- $c - \infty = -\infty - \infty = -\infty$  für  $c \in \mathbb{R}$ ,
- $c \cdot \infty = \infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$  für  $c > 0$ ,
- $c \cdot \infty = (-\infty) \cdot \infty = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$  für  $c < 0$ ,
- $c \cdot (-\infty) = -\infty$  für  $c > 0$ ,
- $c \cdot (-\infty) = \infty$  für  $c < 0$ ,
- $\frac{c}{\pm\infty} = 0$  für  $c \in \mathbb{R}$ .

**Achtung:** Ausdrücke wie  $\infty - \infty$ ,  $-\infty + \infty$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ,  $0 \cdot (\pm\infty)$ ,  $\frac{\pm\infty}{0}$  sind unbestimmt und können nicht sinnvoll definiert werden.

Man finde Beispiele für Folgen vom Typ „ $0 \cdot \infty$ “ mit Grenzwert  $0, 1, -42$ , bestimmter Divergenz in beide Richtungen sowie nicht bestimmter Divergenz.

Haben Sie's geschafft?

# Grenzwerte und Konvergenz

## Bestimmte Divergenz

Einige Rechenregeln aus Satz 3.21 lassen sich teilweise auf bestimmt divergente Folgen übertragen. Dazu definiert man:

- $c + \infty = \infty + \infty = \infty$  für  $c \in \mathbb{R}$ ,
- $c - \infty = -\infty - \infty = -\infty$  für  $c \in \mathbb{R}$ ,
- $c \cdot \infty = \infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$  für  $c > 0$ ,
- $c \cdot \infty = (-\infty) \cdot \infty = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$  für  $c < 0$ ,
- $c \cdot (-\infty) = -\infty$  für  $c > 0$ ,
- $c \cdot (-\infty) = \infty$  für  $c < 0$ ,
- $\frac{c}{\pm\infty} = 0$  für  $c \in \mathbb{R}$ .

**Achtung:** Ausdrücke wie  $\infty - \infty$ ,  $-\infty + \infty$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ,  $0 \cdot (\pm\infty)$ ,  $\frac{\pm\infty}{0}$  sind unbestimmt und können nicht sinnvoll definiert werden.

Man finde Beispiele für Folgen vom Typ „ $0 \cdot \infty$ “ mit Grenzwert  $0, 1, -42$ , bestimmter Divergenz in beide Richtungen sowie nicht bestimmter Divergenz.

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

### Wichtige Beispiele

Für  $\alpha_k, \beta_l \neq 0$  gilt

$$\frac{\sum_{j=0}^k \alpha_j n^j}{\sum_{j=0}^l \beta_j n^j} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_k n^k}{\beta_0 + \beta_1 n + \dots + \beta_l n^l} \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{falls } k < l; \\ \frac{\alpha_k}{\beta_l}, & \text{falls } k = l; \\ \infty, & \text{falls } k > l, \frac{\alpha_k}{\beta_l} > 0; \\ -\infty, & \text{falls } k > l, \frac{\alpha_k}{\beta_l} < 0. \end{cases}$$

### Wichtige Beispiele

Für  $\alpha_k, \beta_l \neq 0$  gilt

$$\frac{\sum_{j=0}^k \alpha_j n^j}{\sum_{j=0}^l \beta_j n^j} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_k n^k}{\beta_0 + \beta_1 n + \dots + \beta_l n^l} \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{falls } k < l; \\ \frac{\alpha_k}{\beta_l}, & \text{falls } k = l; \\ \infty, & \text{falls } k > l, \frac{\alpha_k}{\beta_l} > 0; \\ -\infty, & \text{falls } k > l, \frac{\alpha_k}{\beta_l} < 0. \end{cases}$$

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

### Wichtige Beispiele

Für  $\alpha_k, \beta_l \neq 0$  gilt

$$\frac{\sum_{j=0}^k \alpha_j n^j}{\sum_{j=0}^l \beta_j n^j} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_k n^k}{\beta_0 + \beta_1 n + \dots + \beta_l n^l} \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{falls } k < l; \\ \frac{\alpha_k}{\beta_l}, & \text{falls } k = l; \\ \infty, & \text{falls } k > l, \frac{\alpha_k}{\beta_l} > 0; \\ -\infty, & \text{falls } k > l, \frac{\alpha_k}{\beta_l} < 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie die Aussage, indem Sie jeweils die höchste in Zähler und Nenner vorkommende Potenz von  $n$  ausklammern und dann die Grenzwertsätze anwenden.

### Wichtige Beispiele

Für  $\alpha_k, \beta_l \neq 0$  gilt

$$\frac{\sum_{j=0}^k \alpha_j n^j}{\sum_{j=0}^l \beta_j n^j} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_k n^k}{\beta_0 + \beta_1 n + \dots + \beta_l n^l} \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{falls } k < l; \\ \frac{\alpha_k}{\beta_l}, & \text{falls } k = l; \\ \infty, & \text{falls } k > l, \frac{\alpha_k}{\beta_l} > 0; \\ -\infty, & \text{falls } k > l, \frac{\alpha_k}{\beta_l} < 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie die Aussage, indem Sie jeweils die höchste in Zähler und Nenner vorkommende Potenz von  $n$  ausklammern und dann die Grenzwertsätze anwenden.

Haben Sie's geschafft?

### Wichtige Beispiele

Für  $\alpha_k, \beta_l \neq 0$  gilt

$$\frac{\sum_{j=0}^k \alpha_j n^j}{\sum_{j=0}^l \beta_j n^j} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_k n^k}{\beta_0 + \beta_1 n + \dots + \beta_l n^l} \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{falls } k < l; \\ \frac{\alpha_k}{\beta_l}, & \text{falls } k = l; \\ \infty, & \text{falls } k > l, \frac{\alpha_k}{\beta_l} > 0; \\ -\infty, & \text{falls } k > l, \frac{\alpha_k}{\beta_l} < 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie die Aussage, indem Sie jeweils die höchste in Zähler und Nenner vorkommende Potenz von  $n$  ausklammern und dann die Grenzwertsätze anwenden.

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

### Wichtige Beispiele

Für  $\alpha_k, \beta_l \neq 0$  gilt

$$\frac{\sum_{j=0}^k \alpha_j n^j}{\sum_{j=0}^l \beta_j n^j} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_k n^k}{\beta_0 + \beta_1 n + \dots + \beta_l n^l} \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{falls } k < l; \\ \frac{\alpha_k}{\beta_l}, & \text{falls } k = l; \\ \infty, & \text{falls } k > l, \frac{\alpha_k}{\beta_l} > 0; \\ -\infty, & \text{falls } k > l, \frac{\alpha_k}{\beta_l} < 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie die Aussage, indem Sie jeweils die höchste in Zähler und Nenner vorkommende Potenz von  $n$  ausklammern und dann die Grenzwertsätze anwenden.

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

### Wichtige Beispiele

Für  $\alpha_k, \beta_l \neq 0$  gilt

$$\frac{\sum_{j=0}^k \alpha_j n^j}{\sum_{j=0}^l \beta_j n^j} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_k n^k}{\beta_0 + \beta_1 n + \dots + \beta_l n^l} \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{falls } k < l; \\ \frac{\alpha_k}{\beta_l}, & \text{falls } k = l; \\ \infty, & \text{falls } k > l, \frac{\alpha_k}{\beta_l} > 0; \\ -\infty, & \text{falls } k > l, \frac{\alpha_k}{\beta_l} < 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie die Aussage, indem Sie jeweils die höchste in Zähler und Nenner vorkommende Potenz von  $n$  ausklammern und dann die Grenzwertsätze anwenden.

Wie lauten die Grenzwerte der Folgen  $\left(\frac{n+3}{n^2+4n-1}\right)$ ,  $\left(\frac{n^2+3}{5n^2-4n+1}\right)$  und  $\left(\frac{4n^3+1}{-8n+1}\right)$ ?

### Wichtige Beispiele

Für  $\alpha_k, \beta_l \neq 0$  gilt

$$\frac{\sum_{j=0}^k \alpha_j n^j}{\sum_{j=0}^l \beta_j n^j} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_k n^k}{\beta_0 + \beta_1 n + \dots + \beta_l n^l} \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{falls } k < l; \\ \frac{\alpha_k}{\beta_l}, & \text{falls } k = l; \\ \infty, & \text{falls } k > l, \frac{\alpha_k}{\beta_l} > 0; \\ -\infty, & \text{falls } k > l, \frac{\alpha_k}{\beta_l} < 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie die Aussage, indem Sie jeweils die höchste in Zähler und Nenner vorkommende Potenz von  $n$  ausklammern und dann die Grenzwertsätze anwenden.

Wie lauten die Grenzwerte der Folgen  $\left(\frac{n+3}{n^2+4n-1}\right)$ ,  $\left(\frac{n^2+3}{5n^2-4n+1}\right)$  und  $\left(\frac{4n^3+1}{-8n+1}\right)$ ?

Haben Sie's geschafft?

### Wichtige Beispiele

Für  $\alpha_k, \beta_l \neq 0$  gilt

$$\frac{\sum_{j=0}^k \alpha_j n^j}{\sum_{j=0}^l \beta_j n^j} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_k n^k}{\beta_0 + \beta_1 n + \dots + \beta_l n^l} \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{falls } k < l; \\ \frac{\alpha_k}{\beta_l}, & \text{falls } k = l; \\ \infty, & \text{falls } k > l, \frac{\alpha_k}{\beta_l} > 0; \\ -\infty, & \text{falls } k > l, \frac{\alpha_k}{\beta_l} < 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie die Aussage, indem Sie jeweils die höchste in Zähler und Nenner vorkommende Potenz von  $n$  ausklammern und dann die Grenzwertsätze anwenden.

Wie lauten die Grenzwerte der Folgen  $\left(\frac{n+3}{n^2+4n-1}\right)$ ,  $\left(\frac{n^2+3}{5n^2-4n+1}\right)$  und  $\left(\frac{4n^3+1}{-8n+1}\right)$ ?

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

# Grenzwerte und Konvergenz

## Geometrische Folge

Geometrische Folge:

$$q^n \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{für } |q| < 1; \\ 1, & \text{für } q = 1; \\ +\infty, & \text{für } q > 1. \end{cases}$$

Für  $q \leq -1$  ist die Folge  $(q^n)$  divergent, aber nicht bestimmt divergent (alternierendes Vorzeichen).

# Grenzwerte und Konvergenz

## Geometrische Folge

Geometrische Folge:

$$q^n \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{für } |q| < 1; \\ 1, & \text{für } q = 1; \\ +\infty, & \text{für } q > 1. \end{cases}$$

Für  $q \leq -1$  ist die Folge  $(q^n)$  divergent, aber nicht bestimmt divergent (alternierendes Vorzeichen).

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

# Grenzwerte und Konvergenz

## Geometrische Folge

Geometrische Folge:

$$q^n \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{für } |q| < 1; \\ 1, & \text{für } q = 1; \\ +\infty, & \text{für } q > 1. \end{cases}$$

Für  $q \leq -1$  ist die Folge  $(q^n)$  divergent, aber nicht bestimmt divergent (alternierendes Vorzeichen).

Man führe den Beweis für  $q > 1$  mit Hilfe der Bernoulli-Ungleichung (vgl. Mathematik I, Beispiel 1.13, Folie 58) aus.

# Grenzwerte und Konvergenz

## Geometrische Folge

Geometrische Folge:

$$q^n \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{für } |q| < 1; \\ 1, & \text{für } q = 1; \\ +\infty, & \text{für } q > 1. \end{cases}$$

Für  $q \leq -1$  ist die Folge  $(q^n)$  divergent, aber nicht bestimmt divergent (alternierendes Vorzeichen).

Man führe den Beweis für  $q > 1$  mit Hilfe der Bernoulli-Ungleichung (vgl. Mathematik I, Beispiel 1.13, Folie 58) aus.

Haben Sie's geschafft?

# Grenzwerte und Konvergenz

## Geometrische Folge

Geometrische Folge:

$$q^n \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{für } |q| < 1; \\ 1, & \text{für } q = 1; \\ +\infty, & \text{für } q > 1. \end{cases}$$

Für  $q \leq -1$  ist die Folge  $(q^n)$  divergent, aber nicht bestimmt divergent (alternierendes Vorzeichen).

Man führe den Beweis für  $q > 1$  mit Hilfe der Bernoulli-Ungleichung (vgl. Mathematik I, Beispiel 1.13, Folie 58) aus.

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

# Grenzwerte und Konvergenz

## Geometrische Folge

Geometrische Folge:

$$q^n \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{für } |q| < 1; \\ 1, & \text{für } q = 1; \\ +\infty, & \text{für } q > 1. \end{cases}$$

Für  $q \leq -1$  ist die Folge  $(q^n)$  divergent, aber nicht bestimmt divergent (alternierendes Vorzeichen).

Man führe den Beweis für  $q > 1$  mit Hilfe der Bernoulli-Ungleichung (vgl. Mathematik I, Beispiel 1.13, Folie 58) aus.

Für  $|q| < 1$  gilt im übrigen sogar

$$n^k q^n \rightarrow 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Das polynomielle Wachstum von  $n^k$  ist also schwächer als das exponentielle Abklingen von  $q^n$ .

# Grenzwerte und Konvergenz

## Weitere Beispiele von Grenzwerten

- $n^r \rightarrow \begin{cases} +\infty, & \text{falls } r > 0; \\ 0, & \text{falls } r < 0. \end{cases}$
- $\sqrt[n]{c} \rightarrow 1$  für jede Zahl  $c > 0$ ,
- $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ ,
- $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e = 2.71828\dots$
- $(1 + \frac{x}{n})^n \rightarrow e^x$ .

## ③ Folgen und Reihen

3.1 Folgen

3.2 Grenzwerte und Konvergenz

3.3 Unendliche Reihen

# Unendliche Reihen

Addieren wir von einer gegebenen Zahlenfolge  $(a_k)$  die jeweils ersten Glieder, so entstehen **Partialsummen** (oder **Teilsummen**):

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Diese Partialsummen bilden eine neue Folge  $(s_n)$  und führen uns zum Begriff der **(unendlichen) Reihe**.

### Definition 3.23 (Reihe)

Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Zahlenfolge. Dann heißt  $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$  die  $n$ -te **Partialsumme** von  $(a_k)$ .

Die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wird **Reihe** mit den Gliedern  $a_k$  genannt. Man verwendet für sie die Schreibweise  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt **konvergent**, wenn die zugehörige Partialsummenfolge konvergiert, andernfalls divergent.

Gilt  $s_n \rightarrow s$  für  $n \rightarrow \infty$ , so schreibt man

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$$

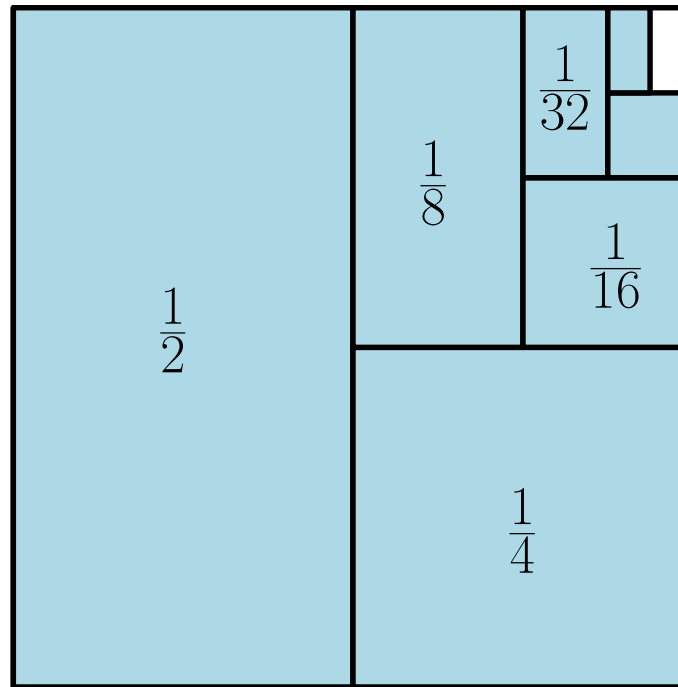
und bezeichnet  $s$  auch als **Wert** oder **Summe** der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

**Anmerkung:** Wie bei Folgen ist man bei den Indizes auch hier nicht auf den Startwert 1 festgelegt.

# Unendliche Reihen

## Beispiel: geometrische Reihe

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$  konvergiert gegen 1, wie folgende geometrische Betrachtung deutlich macht:



Man schreibt also  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ .

Es handelt sich hierbei um einen Spezialfall der **geometrischen Reihe**, die uns später noch beschäftigen wird.

# Unendliche Reihen

## Beispiel

Die Partialsummen zur Folge  $(a_k)$  mit  $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$  sind gegeben durch

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Damit gilt  $s_n \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ ; wir schreiben also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

# Unendliche Reihen

## Beispiel

Die Partialsummen zur Folge  $(a_k)$  mit  $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$  sind gegeben durch

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Damit gilt  $s_n \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ ; wir schreiben also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

# Unendliche Reihen

## Beispiel

Die Partialsummen zur Folge  $(a_k)$  mit  $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$  sind gegeben durch

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Damit gilt  $s_n \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ ; wir schreiben also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Beweisen Sie die Formel für die Partialsummen mittels vollständiger Induktion (Hausaufgabe).

# Unendliche Reihen

## Beispiel

Die Partialsummen zur Folge  $(a_k)$  mit  $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$  sind gegeben durch

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Damit gilt  $s_n \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ ; wir schreiben also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Beweisen Sie die Formel für die Partialsummen mittels vollständiger Induktion (Hausaufgabe).

Haben Sie's geschafft?

# Unendliche Reihen

## Beispiel

Die Partialsummen zur Folge  $(a_k)$  mit  $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$  sind gegeben durch

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Damit gilt  $s_n \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ ; wir schreiben also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Beweisen Sie die Formel für die Partialsummen mittels vollständiger Induktion (Hausaufgabe).

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

# Unendliche Reihen

## Beispiel

Die zur Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (3.4)$$

gehörige Partialsummenfolge ist  $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$  und die Reihe damit **divergent**.

Dieses Beispiel zeigt eindrucksvoll, dass Reihen nicht einfach als „unendliche Summen“ aufgefasst werden können:

Paarweises Zusammenfassen benachbarter Glieder ( $1 - 1 = 0$ ) in (3.4) könnte zum Beispiel zu völlig falschen Schlüssen führen!

# Unendliche Reihen

## Beispiel Dezimaldarstellung als Reihe

Seit Ihrer frühen Schulzeit verwenden Sie für reelle Zahlen auch die Dezimaldarstellung. Betrachtet man zum Beispiel die Zahl  $\pi$ , so gilt:

$$\pi = 3,141529265 \dots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \dots$$

Allgemein lässt sich die Zifferndarstellung einer Dezimalzahl mit einer Vorkommasstelle und Ziffernfolge  $(z_k)$  ( $z_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ) als folgende Reihe auffassen:

$$z_1, z_2 z_3 z_4 z_5 \dots = \frac{z_1}{10^0} + \frac{z_2}{10^1} + \frac{z_3}{10^2} + \frac{z_4}{10^3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{10^{k-1}}.$$

Die Basis 10 ist übrigens willkürlich gewählt (Anzahl der Finger).

Computer verwenden intern zumeist die Basis 2 (Dualzahlen), im antiken Babylon verwendete man 60; bei den Ureinwohnern Südamerikas waren 4, 8 und 16 als Basis gebräuchlich (Rechnen ohne Daumen?).

# Unendliche Reihen

## Partialsommen arithmetischer Folgen

**Erinnerung:** Eine arithmetische Folge ist gekennzeichnet durch immer gleiche Differenz ihrer Folgenglieder.

### Satz 3.24

Sei  $(a_k)$  eine arithmetische Folge mit  $a_{k+1} - a_k = d$  (also mit  $a_k = a_1 + (k - 1)d$ , vgl. Lemma 3.4). Dann gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n \left( a_1 + \frac{1}{2}(n - 1)d \right). \quad (3.5)$$

Die zugehörige Reihe  $\sum_{k=1}^n a_k$  ist daher immer divergent – mit Ausnahme des Falles  $a_k = 0$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) (d.h.  $a_1 = 0$  und  $d = 0$ ).

Bei arithmetischen Folgen sind also nur die Partialsommen, aber nicht deren Grenzwerte interessant.

# Unendliche Reihen

## Exkurs: Gaußsche Summenformel

Einen Spezialfall von (3.5) bildet die Formel („Kleiner Gauß“):

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Sie war bereits den Babyloniern bekannt und wurde vom 9-jährigen C.F. Gauß bei der Schulaufgabe, die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 zu addieren, wiederentdeckt.

Schema:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 99 & 100 & \\ 100 & 99 & 98 & 97 & \dots & 2 & 1 & \\ \hline 101 & 101 & 101 & 101 & \dots & 101 & 101 & \end{array} \Rightarrow \sum_{i=1}^{100} i = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 = 5050.$$



Carl Friedrich Gauß (deutscher Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker, 1777-1855).

Einer der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten, mit grundlegenden Beiträgen zur Zahlentheorie, elliptischen Funktionen, nicht-Euklidischer Geometrie und Statistik. U. a. ermöglichte die von ihm entwickelte Ausgleichsrechnung (Methode der kleinsten Quadrate) die Wiederentdeckung des Zwergplaneten Ceres (1801).

# Unendliche Reihen

## Geometrische Reihe

Die Reihe zur geometrischen Folge ist eine der wichtigsten in der Mathematik überhaupt. Auch hier beginnen wir wieder mit einer Aussage über die Darstellung der Partialsummen:

### Satz 3.25

Sei  $(a_k)$  eine geometrische Folge mit  $a_{k+1}/a_k = q$  (also mit  $a_k = a_1 q^{k-1}$ , vgl. Lemma 3.6). Dann gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \begin{cases} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, & \text{falls } q \neq 1; \\ na_1, & \text{falls } q = 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

# Unendliche Reihen

## Geometrische Reihe

Die Reihe zur geometrischen Folge ist eine der wichtigsten in der Mathematik überhaupt. Auch hier beginnen wir wieder mit einer Aussage über die Darstellung der Partialsummen:

### Satz 3.25

Sei  $(a_k)$  eine geometrische Folge mit  $a_{k+1}/a_k = q$  (also mit  $a_k = a_1 q^{k-1}$ , vgl. Lemma 3.6). Dann gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \begin{cases} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, & \text{falls } q \neq 1; \\ na_1, & \text{falls } q = 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

# Unendliche Reihen

## Geometrische Reihe

Die Reihe zur geometrischen Folge ist eine der wichtigsten in der Mathematik überhaupt. Auch hier beginnen wir wieder mit einer Aussage über die Darstellung der Partialsummen:

### Satz 3.25

Sei  $(a_k)$  eine geometrische Folge mit  $a_{k+1}/a_k = q$  (also mit  $a_k = a_1 q^{k-1}$ , vgl. Lemma 3.6). Dann gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \begin{cases} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, & \text{falls } q \neq 1; \\ na_1, & \text{falls } q = 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Man beweise Satz 3.25 mittels vollständiger Induktion über  $n$ .

# Unendliche Reihen

## Geometrische Reihe

Die Reihe zur geometrischen Folge ist eine der wichtigsten in der Mathematik überhaupt. Auch hier beginnen wir wieder mit einer Aussage über die Darstellung der Partialsummen:

### Satz 3.25

Sei  $(a_k)$  eine geometrische Folge mit  $a_{k+1}/a_k = q$  (also mit  $a_k = a_1 q^{k-1}$ , vgl. Lemma 3.6). Dann gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \begin{cases} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, & \text{falls } q \neq 1; \\ na_1, & \text{falls } q = 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Man beweise Satz 3.25 mittels vollständiger Induktion über  $n$ .

Haben Sie's geschafft?

# Unendliche Reihen

## Geometrische Reihe

Die Reihe zur geometrischen Folge ist eine der wichtigsten in der Mathematik überhaupt. Auch hier beginnen wir wieder mit einer Aussage über die Darstellung der Partialsummen:

### Satz 3.25

Sei  $(a_k)$  eine geometrische Folge mit  $a_{k+1}/a_k = q$  (also mit  $a_k = a_1 q^{k-1}$ , vgl. Lemma 3.6). Dann gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \begin{cases} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, & \text{falls } q \neq 1; \\ na_1, & \text{falls } q = 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Man beweise Satz 3.25 mittels vollständiger Induktion über  $n$ .

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

# Unendliche Reihen

## Geometrische Reihe

Mittels Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  erhält man aus Formel (3.6):

### Satz 3.26 (Geometrische Reihe)

Eine Reihe der Form  $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1}$  heißt **geometrische Reihe**. Die geometrische Reihe konvergiert für  $|q| < 1$ , in diesem Falle gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{1}{1-q}. \quad (3.7)$$

Für  $|q| \geq 1$  ist die Reihe divergent.

# Unendliche Reihen

## Geometrische Reihe

Mittels Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  erhält man aus Formel (3.6):

### Satz 3.26 (Geometrische Reihe)

Eine Reihe der Form  $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1}$  heißt **geometrische Reihe**. Die geometrische Reihe konvergiert für  $|q| < 1$ , in diesem Falle gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{1}{1-q}. \quad (3.7)$$

Für  $|q| \geq 1$  ist die Reihe divergent.

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

# Unendliche Reihen

## Geometrische Reihe

Mittels Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  erhält man aus Formel (3.6):

### Satz 3.26 (Geometrische Reihe)

Eine Reihe der Form  $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1}$  heißt **geometrische Reihe**. Die geometrische Reihe konvergiert für  $|q| < 1$ , in diesem Falle gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{1}{1-q}. \quad (3.7)$$

Für  $|q| \geq 1$  ist die Reihe divergent.

Man berechne die Summen der Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{7^{k-1}}$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ .

# Unendliche Reihen

## Geometrische Reihe

Mittels Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  erhält man aus Formel (3.6):

### Satz 3.26 (Geometrische Reihe)

Eine Reihe der Form  $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1}$  heißt **geometrische Reihe**. Die geometrische Reihe konvergiert für  $|q| < 1$ , in diesem Falle gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{1}{1-q}. \quad (3.7)$$

Für  $|q| \geq 1$  ist die Reihe divergent.

Man berechne die Summen der Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{7^{k-1}}$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ .

Haben Sie's geschafft?

# Unendliche Reihen

## Geometrische Reihe

Mittels Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  erhält man aus Formel (3.6):

### Satz 3.26 (Geometrische Reihe)

Eine Reihe der Form  $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1}$  heißt **geometrische Reihe**. Die geometrische Reihe konvergiert für  $|q| < 1$ , in diesem Falle gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{1}{1-q}. \quad (3.7)$$

Für  $|q| \geq 1$  ist die Reihe divergent.

Man berechne die Summen der Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{7^{k-1}}$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ .

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

# Unendliche Reihen

## Harmonische Reihe

**Bemerkung:** In Tafelwerken finden Sie auch häufig die Formeln

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^k = a_1 \frac{q}{1-q} \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} a_0 q^\ell = a_0 \frac{1}{1-q}.$$

Diese erhält man aus (3.7) durch Multiplikation von  $a_1$  mit  $q$  bzw. durch **Indexverschiebung**  $\ell = k - 1$ .

Eine Reihe der Form  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  mit  $\alpha > 0$  wird **harmonische Reihe** genannt.

Es gilt:

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  ist konvergent für alle  $\alpha > 1$ .
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$  (d.h. die Reihe divergiert) für alle  $\alpha \leq 1$ .

Insbesondere sind also die Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$  divergent, während  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  konvergiert.

# Unendliche Reihen

## Exkurs zur Divergenz der harmonischen Reihe

Die Divergenz von  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  zeigt man<sup>1</sup> durch Abschätzung der Partialsummen für  $n = 2^m$ :

$$\begin{aligned} s_{2^m} &= 1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \left( \frac{1}{2^{m-1} + 1} + \dots + \frac{1}{2^m} \right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)}_{2 \text{ mal}} + \underbrace{\left( \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right)}_{4 \text{ mal}} + \dots + \underbrace{\left( \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^m} \right)}_{2^{m-1} \text{ mal}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} m \rightarrow \infty \quad \text{für } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Die Partialsummenfolge enthält also eine divergente Teilfolge und ist damit selbst divergent.

---

<sup>1</sup>Dieser Beweisansatz findet sich übrigens bereits in mittelalterlicher Literatur (Nicole Oresme, Frankreich,  $\approx 1350$ ).

# Unendliche Reihen

## Rechnen mit konvergenten Reihen

Wendet man die Grenzwertsätze (Satz 3.21) auf Partialsummenfolgen an, erhält man:

### Satz 3.27

Sind  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  beide konvergent, so gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}.$$

# Unendliche Reihen

## Absolute Konvergenz

# Unendliche Reihen

## Absolute Konvergenz

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

# Unendliche Reihen

## Absolute Konvergenz

Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{5^k} + \frac{4}{3^k} \right)$

# Unendliche Reihen

## Absolute Konvergenz

Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{5^k} + \frac{4}{3^k} \right)$

Haben Sie's geschafft?

# Unendliche Reihen

## Absolute Konvergenz

Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{5^k} + \frac{4}{3^k} \right)$

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

# Unendliche Reihen

## Absolute Konvergenz

Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{5^k} + \frac{4}{3^k} \right)$

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

# Unendliche Reihen

## Absolute Konvergenz

Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{5^k} + \frac{4}{3^k} \right)$

Machen Sie sich anhand der Partialsummen klar, dass Aussagen analog zu Satz 3.27 für  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot b_k)$  **nicht** gelten können.

# Unendliche Reihen

## Absolute Konvergenz

Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{5^k} + \frac{4}{3^k} \right)$

Machen Sie sich anhand der Partialsummen klar, dass Aussagen analog zu Satz 3.27 für  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot b_k)$  **nicht** gelten können.

Haben Sie's geschafft?

# Unendliche Reihen

## Absolute Konvergenz

Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{5^k} + \frac{4}{3^k} \right)$

Machen Sie sich anhand der Partialsummen klar, dass Aussagen analog zu Satz 3.27 für  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot b_k)$  **nicht** gelten können.

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

# Unendliche Reihen

## Absolute Konvergenz

Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{5^k} + \frac{4}{3^k} \right)$

Machen Sie sich anhand der Partialsummen klar, dass Aussagen analog zu Satz 3.27 für  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot b_k)$  **nicht** gelten können.

### Definition 3.28 (Absolute Konvergenz)

Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt **absolut konvergent**, wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergiert.

Absolut konvergente Reihen sind besonders komfortabel – zum Beispiel darf man **nur** bei ihnen die Glieder beliebig umordnen, ohne den Grenzwert zu verändern.

Der folgende Satz liefert den Bezug zur „gewöhnlichen“ Konvergenz:

### Satz 3.29

Eine absolut konvergente Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist erst recht konvergent. Für sie gilt die verallgemeinerte Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

**Beispiele:** (Nachweis später)

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$  ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Es gilt  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$ .

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$  ist absolut konvergent. Es gilt

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} \leq \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

# Unendliche Reihen

## Konvergenzkriterien

Mitunter stellt man lediglich die Frage nach der Konvergenz einer Reihe, ohne deren konkreten Grenzwert berechnen zu wollen. Hierbei sind eine Reihe von **Konvergenzkriterien** hilfreich.

Einen ersten Satz erhalten wir aus dem Cauchy-Kriterium für die Partialsummenfolge zu einer konvergenten Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Es gilt

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| < \epsilon \quad \text{für großes } n$$

und daher

### Satz 3.30 (Notwendiges Konvergenzkriterium)

*Bei einer konvergenten Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  bilden die Glieder eine Nullfolge, d. h.  $a_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .*

# Unendliche Reihen

## Konvergenzkriterien

Mitunter stellt man lediglich die Frage nach der Konvergenz einer Reihe, ohne deren konkreten Grenzwert berechnen zu wollen. Hierbei sind eine Reihe von **Konvergenzkriterien** hilfreich.

Einen ersten Satz erhalten wir aus dem Cauchy-Kriterium für die Partialsummenfolge zu einer konvergenten Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Es gilt

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| < \epsilon \quad \text{für großes } n$$

und daher

### Satz 3.30 (Notwendiges Konvergenzkriterium)

*Bei einer konvergenten Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  bilden die Glieder eine Nullfolge, d. h.  $a_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .*

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

# Unendliche Reihen

## Konvergenzkriterien

Mitunter stellt man lediglich die Frage nach der Konvergenz einer Reihe, ohne deren konkreten Grenzwert berechnen zu wollen. Hierbei sind eine Reihe von **Konvergenzkriterien** hilfreich.

Einen ersten Satz erhalten wir aus dem Cauchy-Kriterium für die Partialsummenfolge zu einer konvergenten Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Es gilt

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| < \epsilon \quad \text{für großes } n$$

und daher

### Satz 3.30 (Notwendiges Konvergenzkriterium)

*Bei einer konvergenten Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  bilden die Glieder eine Nullfolge, d. h.  $a_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .*

Kann die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1}$  konvergieren? Gilt die Umkehrung von Satz 3.30? Wenn nicht, finden Sie Gegenbeispiele.

# Unendliche Reihen

## Konvergenzkriterien

Mitunter stellt man lediglich die Frage nach der Konvergenz einer Reihe, ohne deren konkreten Grenzwert berechnen zu wollen. Hierbei sind eine Reihe von **Konvergenzkriterien** hilfreich.

Einen ersten Satz erhalten wir aus dem Cauchy-Kriterium für die Partialsummenfolge zu einer konvergenten Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Es gilt

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| < \epsilon \quad \text{für großes } n$$

und daher

### Satz 3.30 (Notwendiges Konvergenzkriterium)

*Bei einer konvergenten Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  bilden die Glieder eine Nullfolge, d. h.  $a_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .*

Kann die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1}$  konvergieren? Gilt die Umkehrung von Satz 3.30? Wenn nicht, finden Sie Gegenbeispiele.

**Haben Sie's geschafft?**

# Unendliche Reihen

## Konvergenzkriterien

Mitunter stellt man lediglich die Frage nach der Konvergenz einer Reihe, ohne deren konkreten Grenzwert berechnen zu wollen. Hierbei sind eine Reihe von **Konvergenzkriterien** hilfreich.

Einen ersten Satz erhalten wir aus dem Cauchy-Kriterium für die Partialsummenfolge zu einer konvergenten Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Es gilt

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| < \epsilon \quad \text{für großes } n$$

und daher

### Satz 3.30 (Notwendiges Konvergenzkriterium)

*Bei einer konvergenten Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  bilden die Glieder eine Nullfolge, d. h.  $a_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .*

Kann die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1}$  konvergieren? Gilt die Umkehrung von Satz 3.30? Wenn nicht, finden Sie Gegenbeispiele.

**Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!**

# Unendliche Reihen

## Alternierende Reihen

Für alternierende Reihen (d. h. mit wechselndem Vorzeichen der Glieder) ist das folgende Kriterium häufig hilfreich:

### Satz 3.31 (Leibniz-Kriterium)

*Eine alternierende Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$  konvergiert, wenn  $(a_k)$  eine **monotone Nullfolge** ist.*

# Unendliche Reihen

## Alternierende Reihen

Für alternierende Reihen (d. h. mit wechselndem Vorzeichen der Glieder) ist das folgende Kriterium häufig hilfreich:

### Satz 3.31 (Leibniz-Kriterium)

Eine alternierende Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$  konvergiert, wenn  $(a_k)$  eine **monotone Nullfolge** ist.

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

# Unendliche Reihen

## Alternierende Reihen

Für alternierende Reihen (d. h. mit wechselndem Vorzeichen der Glieder) ist das folgende Kriterium häufig hilfreich:

### Satz 3.31 (Leibniz-Kriterium)

Eine alternierende Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$  konvergiert, wenn  $(a_k)$  eine **monotone Nullfolge** ist.

Was lässt sich über die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k^3}$$

sagen? Konvergieren diese Reihen auch absolut?

# Unendliche Reihen

## Alternierende Reihen

Für alternierende Reihen (d. h. mit wechselndem Vorzeichen der Glieder) ist das folgende Kriterium häufig hilfreich:

### Satz 3.31 (Leibniz-Kriterium)

Eine alternierende Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$  konvergiert, wenn  $(a_k)$  eine **monotone Nullfolge** ist.

Was lässt sich über die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k^3}$$

sagen? Konvergieren diese Reihen auch absolut?

Haben Sie's geschafft?

# Unendliche Reihen

## Alternierende Reihen

Für alternierende Reihen (d. h. mit wechselndem Vorzeichen der Glieder) ist das folgende Kriterium häufig hilfreich:

### Satz 3.31 (Leibniz-Kriterium)

Eine alternierende Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$  konvergiert, wenn  $(a_k)$  eine **monotone Nullfolge** ist.

Was lässt sich über die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k^3}$$

sagen? Konvergieren diese Reihen auch absolut?

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

# Unendliche Reihen

## Majorantenkriterium

Nach Satz 3.11 ist eine Reihe mit nichtnegativen Gliedern genau dann konvergent, wenn ihre Partialsummenfolge beschränkt ist. Daraus folgen:

### Satz 3.32 (Majorantenkriterium)

*Ist  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  eine konvergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern, und gilt fast immer  $|a_k| \leq b_k$ , so konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , und zwar sogar absolut.*

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  wird dabei **Majorante** von  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  genannt.

### Beispiel:

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$  konvergiert, denn  $\frac{1}{k^2+k} \leq \frac{1}{k^2}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , und  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  konvergiert.

### Satz 3.33 (Minorantenkriterium)

Ist  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  eine divergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern, und gilt fast immer  $a_k \geq b_k$ , dann ist auch  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent.

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  wird dabei **Minorante** von  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  genannt.

#### Beispiel:

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$  divergiert, denn  $\frac{1}{k+\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k+k} = \frac{1}{2k}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ ,  
und  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$  divergiert (harmonische Reihe).

Geometrische Reihen als Majoranten bzw. Minoranten führen auf zwei Kriterien, die häufig bei Reihengliedern mit Quotienten- oder Potenzstruktur greifen:

### Satz 3.34 (Wurzelkriterium)

*Gilt mit einer festen positiven Zahl  $q < 1$  fast immer*

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q,$$

*so konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , und zwar sogar absolut.*

*Gilt jedoch fast immer*

$$\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1,$$

*so ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent.*

**Achtung:** Es genügt **nicht**, lediglich  $\sqrt[k]{|a_k|} < 1$  nachzuweisen, um auf Konvergenz zu schließen! Dies allein kann für konvergente wie divergente Reihen gelten.

Geometrische Reihen als Majoranten bzw. Minoranten führen auf zwei Kriterien, die häufig bei Reihengliedern mit Quotienten- oder Potenzstruktur greifen:

### Satz 3.34 (Wurzelkriterium)

*Gilt mit einer festen positiven Zahl  $q < 1$  fast immer*

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q,$$

*so konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , und zwar sogar absolut.*

*Gilt jedoch fast immer*

$$\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1,$$

*so ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent.*

**Achtung:** Es genügt **nicht**, lediglich  $\sqrt[k]{|a_k|} < 1$  nachzuweisen, um auf Konvergenz zu schließen! Dies allein kann für konvergente wie divergente Reihen gelten.

**Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!**

# Unendliche Reihen

## Wurzelkriterium

Geometrische Reihen als Majoranten bzw. Minoranten führen auf zwei Kriterien, die häufig bei Reihengliedern mit Quotienten- oder Potenzstruktur greifen:

### Satz 3.34 (Wurzelkriterium)

*Gilt mit einer festen positiven Zahl  $q < 1$  fast immer*

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q,$$

*so konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , und zwar sogar absolut.*

*Gilt jedoch fast immer*

$$\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1,$$

*so ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent.*

**Achtung:** Es genügt **nicht**, lediglich  $\sqrt[k]{|a_k|} < 1$  nachzuweisen, um auf Konvergenz zu schließen! Dies allein kann für konvergente wie divergente Reihen gelten.

Beispiele:  $\sum \frac{1}{n}$  und  $\sum \frac{1}{n^2}$ .

### Satz 3.35 (Quotientenkriterium)

Gilt mit einer festen positiven Zahl  $q < 1$  fast immer

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q,$$

so konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , und zwar sogar absolut. Gilt jedoch fast immer

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1,$$

so ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent.

Dabei ist natürlich vorauszusetzen, dass fast immer  $a_k \neq 0$  ist.

**Achtung:** Auch hier liefert lediglich  $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$  keine Konvergenzaussage.

### Satz 3.35 (Quotientenkriterium)

Gilt mit einer festen positiven Zahl  $q < 1$  fast immer

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q,$$

so konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , und zwar sogar absolut. Gilt jedoch fast immer

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1,$$

so ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent.

Dabei ist natürlich vorauszusetzen, dass fast immer  $a_k \neq 0$  ist.

**Achtung:** Auch hier liefert lediglich  $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$  keine Konvergenzaussage. **Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!**

### Satz 3.35 (Quotientenkriterium)

Gilt mit einer festen positiven Zahl  $q < 1$  fast immer

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q,$$

so konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , und zwar sogar absolut. Gilt jedoch fast immer

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1,$$

so ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent.

Dabei ist natürlich vorauszusetzen, dass fast immer  $a_k \neq 0$  ist.

**Achtung:** Auch hier liefert lediglich  $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$  keine Konvergenzaussage.

Beispiele:  $\sum \frac{1}{n}$ ,  $\sum \frac{1}{n^2}$  und  $\sum \frac{k+1}{k}$ .

Folgende Version von Quotienten- und Wurzelkriterium ist besonders handlich und wird in der Praxis am häufigsten verwendet:

### Folgerung 3.36 (Quotienten- und Wurzelfolge)

*Konvergiert die Quotientenfolge  $\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)$  oder die Wurzelfolge  $(\sqrt[k]{|a_k|})$  gegen einen Grenzwert  $\alpha$ , so ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*

- *(absolut) konvergent, wenn  $\alpha < 1$ ,*
- *divergent, wenn  $\alpha > 1$ .*

**Bemerkung:** Im Falle  $\alpha = 1$  liefern die Kriterien kein Ergebnis. Eine nähere Untersuchung wird notwendig.

Folgende Version von Quotienten- und Wurzelkriterium ist besonders handlich und wird in der Praxis am häufigsten verwendet:

### Folgerung 3.36 (Quotienten- und Wurzelfolge)

*Konvergiert die Quotientenfolge  $\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)$  oder die Wurzelfolge  $\left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)$  gegen einen Grenzwert  $\alpha$ , so ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*

- *(absolut) konvergent, wenn  $\alpha < 1$ ,*
- *divergent, wenn  $\alpha > 1$ .*

**Bemerkung:** Im Falle  $\alpha = 1$  liefern die Kriterien kein Ergebnis. Eine nähere Untersuchung wird notwendig.

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

Folgende Version von Quotienten- und Wurzelkriterium ist besonders handlich und wird in der Praxis am häufigsten verwendet:

### Folgerung 3.36 (Quotienten- und Wurzelfolge)

*Konvergiert die Quotientenfolge  $\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)$  oder die Wurzelfolge  $(\sqrt[k]{|a_k|})$  gegen einen Grenzwert  $\alpha$ , so ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*

- *(absolut) konvergent, wenn  $\alpha < 1$ ,*
- *divergent, wenn  $\alpha > 1$ .*

**Bemerkung:** Im Falle  $\alpha = 1$  liefern die Kriterien kein Ergebnis. Eine nähere Untersuchung wird notwendig.

Warum ist Folgerung 3.36 eine unmittelbare Konsequenz der Sätze 3.35 und 3.34?

# Unendliche Reihen

## Quotienten- und Wurzelfolgen

Folgende Version von Quotienten- und Wurzelkriterium ist besonders handlich und wird in der Praxis am häufigsten verwendet:

### Folgerung 3.36 (Quotienten- und Wurzelfolge)

Konvergiert die Quotientenfolge  $\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)$  oder die Wurzelfolge  $(\sqrt[k]{|a_k|})$  gegen einen Grenzwert  $\alpha$ , so ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

- (absolut) konvergent, wenn  $\alpha < 1$ ,
- divergent, wenn  $\alpha > 1$ .

**Bemerkung:** Im Falle  $\alpha = 1$  liefern die Kriterien kein Ergebnis. Eine nähere Untersuchung wird notwendig.

Warum ist Folgerung 3.36 eine unmittelbare Konsequenz der Sätze 3.35 und 3.34?

Haben Sie's geschafft?

# Unendliche Reihen

## Quotienten- und Wurzelfolgen

Folgende Version von Quotienten- und Wurzelkriterium ist besonders handlich und wird in der Praxis am häufigsten verwendet:

### Folgerung 3.36 (Quotienten- und Wurzelfolge)

*Konvergiert die Quotientenfolge  $\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)$  oder die Wurzelfolge  $(\sqrt[k]{|a_k|})$  gegen einen Grenzwert  $\alpha$ , so ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*

- *(absolut) konvergent, wenn  $\alpha < 1$ ,*
- *divergent, wenn  $\alpha > 1$ .*

**Bemerkung:** Im Falle  $\alpha = 1$  liefern die Kriterien kein Ergebnis. Eine nähere Untersuchung wird notwendig.

Warum ist Folgerung 3.36 eine unmittelbare Konsequenz der Sätze 3.35 und 3.34?

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

# Unendliche Reihen

## Beispiele zu Konvergenzkriterien

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$  konvergiert, denn  $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{(k+1)^2}{k^2} \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}$ .
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^k}$  konvergiert, denn  $\sqrt[k]{\left| \frac{k}{k^k} \right|} = \frac{\sqrt[k]{k}}{k} \rightarrow 0$  (da  $\sqrt[k]{k} \rightarrow 1$ ).
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$  konvergiert, denn  $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0$ .

Dabei ist  $k!$  („ $k$ -Fakultät“) für  $k \in \mathbb{N}$  definiert durch  $k! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ , bzw.  $0! := 1$ .

- Es konvergiert sogar  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  für beliebiges  $x \in \mathbb{R}$ , denn

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{x^{k+1}}{x^k} \cdot \frac{k!}{(k+1)!} \right| = \frac{|x|}{k+1} \rightarrow 0.$$

Wir werden diese Reihe später nutzen, um damit die Exponentialfunktion zu definieren:  $e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ .

# Unendliche Reihen

## Ausblick: Anwendungen in den Naturwissenschaften

In den Anwendungen tauchen Reihen häufig in der Gestalt von Potenz- und Fourierreihen auf (mehr dazu später).

Desweiteren werden wir im Kapitel Differentialrechnung den Satz von Taylor kennenlernen, welcher mit solchen Reihenentwicklungen im Zusammenhang steht.

Diese Sätze begründen u. a. folgende häufig verwendeten Näherungen für betragsmäßig kleine  $x \in \mathbb{R}$ :

- $\sin x \approx \tan x \approx x$ ,
- $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ ,
- $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$ ,  $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ .

Zum Beispiel führt die erstgenannte Näherung auf die typischen Sinusschwingungen beim Fadenpendel. Die Näherungen in der letzten Zeile beruhen auf geometrischen Reihen.

# Unendliche Reihen

## Exkurs: Achilles und die Schildkröte

... ist ein bekannter Trugschluss (Paradoxon) des griechischen Philosophen Zenon von Elea (ca. 490–430 v. Chr.).

Es wird behauptet, dass der Läufer Achilles niemals eine Schildkröte einholen kann, wenn sie einmal einen gewissen Vorsprung hat.

Folgende Argumentation:

- Wenn Achilles den Startpunkt der Schildkröte erreicht hat, hat diese einen neuen (kleineren) Vorsprung gewonnen,
- Wenn Achilles diesen neuen Vorsprung aufgeholt hat, ist die Schildkröte wieder ein Stück weiter vorn usw.

Was Zenon damit zeigen wollte, ist auch aufgrund der Quellenlage unklar. Fakt ist, dass die Vorstellungen von Grenzwert und Unendlichkeit in der Antike noch nicht gut ausgeprägt waren.

# Unendliche Reihen

## Exkurs: Achilles und die Schildkröte

... ist ein bekannter Trugschluss (Paradoxon) des griechischen Philosophen Zenon von Elea (ca. 490–430 v. Chr.).

Es wird behauptet, dass der Läufer Achilles niemals eine Schildkröte einholen kann, wenn sie einmal einen gewissen Vorsprung hat.

Folgende Argumentation:

- Wenn Achilles den Startpunkt der Schildkröte erreicht hat, hat diese einen neuen (kleineren) Vorsprung gewonnen,
- Wenn Achilles diesen neuen Vorsprung aufgeholt hat, ist die Schildkröte wieder ein Stück weiter vorn usw.

Was Zenon damit zeigen wollte, ist auch aufgrund der Quellenlage unklar. Fakt ist, dass die Vorstellungen von Grenzwert und Unendlichkeit in der Antike noch nicht gut ausgeprägt waren.

Über das Folgende bitte erstmal selbst Nachdenken und Rechnen!

# Unendliche Reihen

## Exkurs: Achilles und die Schildkröte

... ist ein bekannter Trugschluss (Paradoxon) des griechischen Philosophen Zenon von Elea (ca. 490–430 v. Chr.).

Es wird behauptet, dass der Läufer Achilles niemals eine Schildkröte einholen kann, wenn sie einmal einen gewissen Vorsprung hat.

Folgende Argumentation:

- Wenn Achilles den Startpunkt der Schildkröte erreicht hat, hat diese einen neuen (kleineren) Vorsprung gewonnen,
- Wenn Achilles diesen neuen Vorsprung aufgeholt hat, ist die Schildkröte wieder ein Stück weiter vorn usw.

Was Zenon damit zeigen wollte, ist auch aufgrund der Quellenlage unklar. Fakt ist, dass die Vorstellungen von Grenzwert und Unendlichkeit in der Antike noch nicht gut ausgeprägt waren.

Lösen Sie das Paradoxon mit Ihrem neu erworbenen Wissen über Reihen auf.

# Unendliche Reihen

## Exkurs: Achilles und die Schildkröte

... ist ein bekannter Trugschluss (Paradoxon) des griechischen Philosophen Zenon von Elea (ca. 490–430 v. Chr.).

Es wird behauptet, dass der Läufer Achilles niemals eine Schildkröte einholen kann, wenn sie einmal einen gewissen Vorsprung hat.

Folgende Argumentation:

- Wenn Achilles den Startpunkt der Schildkröte erreicht hat, hat diese einen neuen (kleineren) Vorsprung gewonnen,
- Wenn Achilles diesen neuen Vorsprung aufgeholt hat, ist die Schildkröte wieder ein Stück weiter vorn usw.

Was Zenon damit zeigen wollte, ist auch aufgrund der Quellenlage unklar. Fakt ist, dass die Vorstellungen von Grenzwert und Unendlichkeit in der Antike noch nicht gut ausgeprägt waren.

Lösen Sie das Paradoxon mit Ihrem neu erworbenen Wissen über Reihen auf.

Haben Sie's geschafft?

# Unendliche Reihen

## Exkurs: Achilles und die Schildkröte

... ist ein bekannter Trugschluss (Paradoxon) des griechischen Philosophen Zenon von Elea (ca. 490–430 v. Chr.).

Es wird behauptet, dass der Läufer Achilles niemals eine Schildkröte einholen kann, wenn sie einmal einen gewissen Vorsprung hat.

Folgende Argumentation:

- Wenn Achilles den Startpunkt der Schildkröte erreicht hat, hat diese einen neuen (kleineren) Vorsprung gewonnen,
- Wenn Achilles diesen neuen Vorsprung aufgeholt hat, ist die Schildkröte wieder ein Stück weiter vorn usw.

Was Zenon damit zeigen wollte, ist auch aufgrund der Quellenlage unklar. Fakt ist, dass die Vorstellungen von Grenzwert und Unendlichkeit in der Antike noch nicht gut ausgeprägt waren.

Lösen Sie das Paradoxon mit Ihrem neu erworbenen Wissen über Reihen auf.

Gratulation, wenn ja und ansonsten gibt es ein Erklärvideo!

# Ziele erreicht?

Sie sollten nun (bzw. nach Abschluss der Übungen/Selbststudium):

- wissen, was man unter Folgen und Reihen versteht,
- die Grenzwertdefinition tiefgehend verstanden haben und beherrschen (auswendig!),
- Grenzwerte von Folgen mit Hilfe der Grenzwertsätze sicher berechnen können,
- an einfachen Beispielen Vergleichskriterien anwenden können (gilt für Folgen und Reihen),
- über die Konvergenzeigenschaften von geometrischer und harmonischer Reihe bescheidwissen,
- anhand von Konvergenzkriterien das Konvergenzverhalten von Reihen analysieren können (mit besonderem Schwerpunkt auf den Sätzen 3.30 und 3.31 sowie Folgerung 3.36).

Sie sind sich nicht sicher oder meinen „nein“? **Werden Sie aktiv!**