

# Mathematik II

(für IF, ET, Ph)

Peter Stollmann

Professur Analysis

Sommersemester 2020

**Studiengänge:** B Angewandte Informatik, B Informatik,  
M Informatik für Geistes- und Sozialwissenschaftler, B Biomedizinische Technik,  
B Regenerative Energietechnik, B Elektromobilität, B Elektrotechnik,  
B Computational Science, B Physik



Mathematik!  
TU Chemnitz

## 3 Folgen und Reihen

- 3.1 Folgen
- 3.2 Grenzwerte und Konvergenz
- 3.3 Unendliche Reihen

## 3 Grenzwerte, Stetigkeit und Beispiele reeller Funktionen

- 3.1 Grundlegende Eigenschaften
- 3.2 Grenzwerte reeller Funktionen
- 3.3 Stetigkeit
- 3.4 Elementare Funktionen
  - Polynome
  - Rationale Funktionen
  - Wurzel- und Potenzfunktionen
  - Exponential- und Logarithmusfunktionen
  - Trigonometrische Funktionen und Arkusfunktionen
  - Hyperbel- und Areafunktionen

## 5 Differentialrechnung in einer Variablen

- 5.1 Differenzierbarkeit
- 5.2 Differentiationsregeln
- 5.3 Ableitungen elementarer Funktionen

5.4 Extrema, Wachstum und Krümmung differenzierbarer Funktionen

5.5 Verschiedene Anwendungen

- Kurvendiskussion
- Newton-Verfahren
- Die Regel von de l'Hospital
- Totales Differential und Fehlerfortpflanzung

5.6 Der Satz von Taylor

## 6 Integralrechnung in einer Variablen

6.1 Der Riemannsches Integralbegriff

6.2 Integrationstechniken

6.3 Uneigentliche Integrale

6.4 Volumenberechnung bei Rotationskörpern

6.5 Quadraturformeln – ein erster Einblick

## 7 Differentialgleichungen

7.1 Einführende Beispiele

7.2 Begriffe und Lösbarkeitsfragen

7.3 Differentialgleichungen erster Ordnung

7.4 Trennung der Veränderlichen

- 7.5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung
- 7.6 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- 7.7 Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten
- 7.8 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- 7.9 Anwendung: Mechanische Schwingungen

## 8 Potenz- und Fourier-Reihen

- 8.1 Konvergenz von Funktionenfolgen
- 8.2 Potenzreihen
- 8.3 Fourier-Reihen
  - Begriff, Konvergenz, und Darstellbarkeit von Funktionen
  - Funktionen mit beliebiger Periode
  - Konvergenz, Gliedweise Differentiation und Integration
  - Komplexe Darstellung

In den nächsten Kapiteln werden wir uns mit Funktionen

$$f : D_f \rightarrow W_f$$

auseinandersetzen, bei denen sowohl der **Definitions-** als auch der **Wertebereich** Teilmengen der reellen Zahlen sind ( $D_f, W_f \subset \mathbb{R}$ ).

Diese Funktionen nennen wir kurz **reelle Funktionen**.

Bereits in Abschnitt 1.5 hatten wir uns mit dem Funktionsbegriff auseinandergesetzt. Alle dort bereits erarbeiteten Begriffe gelten natürlich auch für reelle Funktionen.

Allerdings ermöglichen die reellen Zahlen auch speziellere Strukturen. Erste Beiträge liefert dieser Abschnitt.

Eine erste Konvention werden wir bezüglich der Notation treffen:

Ist zu einer reellen Funktion  $f$  lediglich die Bildungsvorschrift

$$x \mapsto f(x)$$

angegeben, so wählen wir den Definitionsbereich  $D_f \subset \mathbb{R}$  so groß wie möglich.

Die so gewählte Menge  $D_f$  heißt **maximaler Definitionsbereich** von  $f$ .

Q! Man identifiziere die maximalen Definitionsbereiche für

$$f(x) = \sqrt[4]{x-1},$$

$$g(x) = x^7,$$

$$\text{und } h(x) = \frac{2x - 3 \sin x}{(x^2 - 1)(x - 4)}.$$

Da Funktionswerte reeller Funktionen vergleichbar sind, lässt sich auch für reelle Funktionen Monotonie definieren:

### Definition 4.1 (monotone Funktion)

Eine reelle Funktion  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf einem Intervall  $I \subset D_f$

- **(streng) monoton wachsend**, wenn für alle  $x, y \in I$  mit  $x < y$  stets

$$f(x) \leq f(y) \quad (\text{bzw. } f(x) < f(y))$$

gilt,

- **(streng) monoton fallend**, wenn für alle  $x, y \in I$  mit  $x < y$  stets

$$f(x) \geq f(y) \quad (\text{bzw. } f(x) > f(y))$$

gilt,

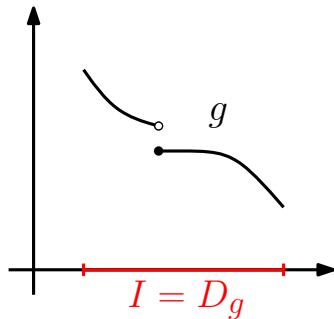
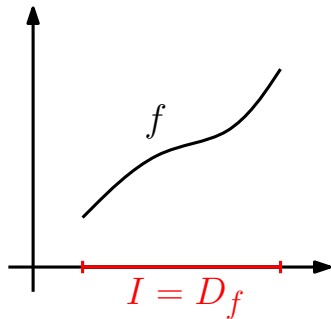
- **(streng) monoton**, wenn sie (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

# Reelle Funktionen

## Graphische Darstellung

Die graphische Darstellung reeller Funktionen erfolgt in der  $x$ - $y$ -Ebene ( $\text{Graph}(f)$  ist eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ ).

### Beispiele:



$f$  ist auf  $D_f$  streng monoton wachsend und  $g$  auf  $D_g$  monoton fallend (allerdings nicht streng).

Ist die reelle Funktion

$$f : D_f \rightarrow W_f$$

bijektiv, dann existiert die **Umkehrfunktion** (auch inverse Funktion genannt)

$$f^{-1} : W_f \rightarrow D_f, \quad f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

Offenbar gilt

$$(x, y) \in \text{Graph}(f) \Leftrightarrow (y, x) \in \text{Graph}(f^{-1}),$$

weshalb der Graph von  $f^{-1}$  aus dem Graphen von  $f$  durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden  $y = x$  hervorgeht.

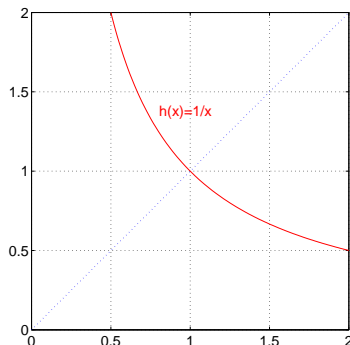
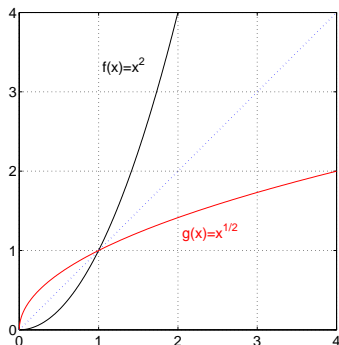
Dasselbe Symbol  $f^{-1}$  wird auch für das **Urbild** einer Teilmenge  $W \subset W_f$  des Wertebereichs einer Funktion  $f$  verwendet (nicht verwechseln!):

$$f^{-1}(W) := \{x \in D_f : f(x) \in W\}.$$

Das Urbild ist auch für nicht-bijektive Funktionen definiert..

### Beispiele:

Graphen von  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f(x) = x^2$  und  $h : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $h(x) = \frac{1}{x}$  sowie der entsprechenden Umkehrfunktionen:



Q! Warum ist im Bild rechts nur ein Graph zu sehen?

### Satz 4.2 (Monotonie und Umkehrfunktion)

*Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton auf dem Intervall  $I$ , so ist  $f : I \rightarrow f(I)$  bijektiv. Die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  ist streng monoton wachsend (fallend), wenn  $f$  streng monoton wachsend (fallend) ist.*

Q! Nach Satz 4.2 besitzt  $f(x) = x^3$  auf ganz  $\mathbb{R}$  eine Umkehrfunktion. Wie lautet diese? Zeichnen Sie die Graphen beider Funktionen.

**Anmerkung:** Die Umkehrfunktion in der Situation von Satz 4.2 ist sogar stetig (Stetigkeitsbegriff folgt noch).

Da uns in  $\mathbb{R}$  die gewohnten Rechenoperationen zur Verfügung stehen, sind folgende „punktweisen“ Konstruktionen möglich:

### Definition 4.3

Es seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  reelle Funktionen und  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Wir definieren neue Funktionen

$$\begin{aligned}\alpha f & : D \rightarrow \mathbb{R}, & (\alpha f)(x) & := \alpha f(x), \\ f \pm g & : D \rightarrow \mathbb{R}, & (f \pm g)(x) & := f(x) \pm g(x), \\ fg & : D \rightarrow \mathbb{R}, & (fg)(x) & := f(x)g(x), \\ f/g & : D_1 \rightarrow \mathbb{R}, & (f/g)(x) & := f(x)/g(x)\end{aligned}$$

mit  $D_1 = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ .

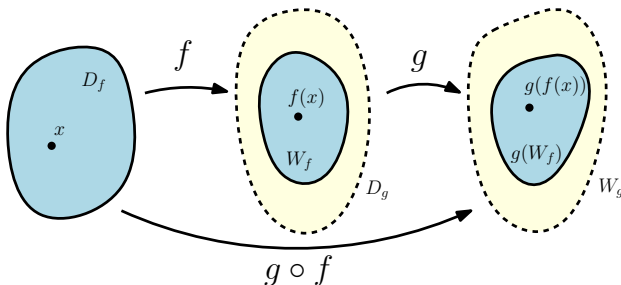
**Achtung:**  $f^{-1}$  und  $\frac{1}{f}$  sind **nicht** dasselbe.

### Definition 4.4

Sind  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $W_f \subseteq D_g$ , dann definieren wir die **Komposition** oder **Verkettung** („ $g$  nach  $f$ “) von  $f$  mit  $g$  durch

$$g \circ f : D_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

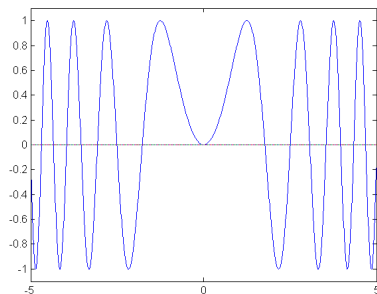
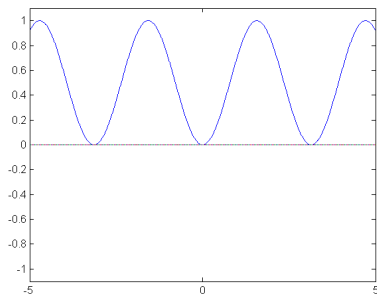
Grafische Veranschaulichung:



**Achtung:** Im allgemeinen ist  $g \circ f \neq f \circ g$ .

**Beispiel:** Für  $f(x) = x^2$  und  $g(x) = \sin x$  ist

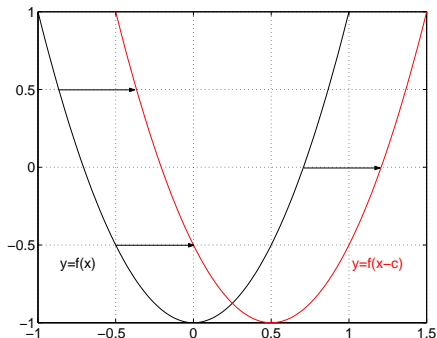
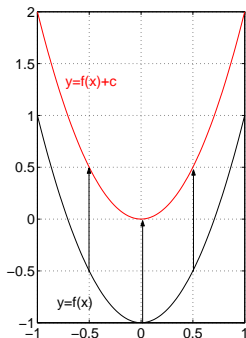
- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sin x)^2 =: \sin^2 x$  (Bild links),
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin(x^2)$  (Bild rechts).



# Reelle Funktionen

## Operationen mit Funktionen

Der Übergang von  $x \mapsto f(x)$  nach  $x \mapsto f(x) + c$  bewirkt eine vertikale Verschiebung des Graphen von  $f$  um  $c$ . Der Übergang von  $x \mapsto f(x)$  nach  $x \mapsto f(x - c)$  bewirkt eine horizontale Verschiebung des Graphen um  $c$ .



Q! Formulieren Sie die beiden neu entstandenen Funktionen als Kompositionen.

### Definition 4.5

Eine reelle Funktion  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **nach oben (unten) beschränkt**, wenn ihr Wertebereich  $W_f \subset \mathbb{R}$  nach oben (unten) beschränkt ist.

Eine Funktion heißt **beschränkt**, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Für beschränkte Funktionen existiert also eine Konstante  $c > 0$ , so dass

$$|f(x)| \leq c \quad \text{für alle } x \in D_f.$$

Q!

Sind die Funktionen

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = (x - 2)^3,$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x}, \quad f_4(x) = \sin(2x),$$

(nach oben/unten) beschränkt?

### Definition 4.6

Eine reelle Funktion  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ , für die mit jedem  $x \in D_f$  auch  $-x \in D_f$  gilt, heißt

- **gerade**, wenn

$$f(x) = f(-x) \quad \text{für alle } x \in D_f,$$

- **ungerade**, wenn

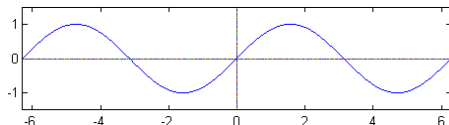
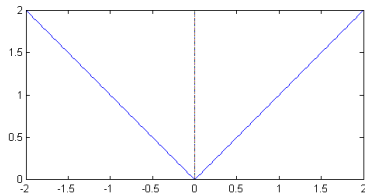
$$f(x) = -f(-x) \quad \text{für alle } x \in D_f.$$

Graphisch äußern sich die Eigenschaften als

- Spiegelsymmetrie bzgl. der  $y$ -Achse (gerade Funktionen),
- Punktsymmetrie am Ursprung (ungerade Funktionen).

### Beispiele:

- $f(x) = |x|$  ist gerade (Bild links),
- $g(x) = \sin x$  ist ungerade (Bild rechts).



Q! Sind die folgenden Funktionen gerade/ungerade?

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = x^5, \quad f_3(x) = x^3 + 1, \quad f_4(x) = x^2 - 1.$$

### Definition 4.7

Eine reelle Funktion  $f : D_f \rightarrow W_f$  heißt **periodisch**, wenn es eine Zahl  $a > 0$  gibt („Periode“), so dass mit jedem  $x \in D_f$  auch  $x + a \in D_f$  gilt, und

$$f(x + a) = f(x) \quad \text{für } x \in D_f. \quad (4.1)$$

Aus (4.1) folgt sofort, dass auch

$$f(x + na) = f(x) \quad \text{für alle } x \in D_f, n \in \mathbb{N},$$

gilt. Mit  $a$  ist also gleichzeitig auch  $na$  Periode.

Im Falle der Existenz gibt man daher häufig die kleinste Periode  $a > 0$  an, um das Verhalten der Funktion  $f$  möglichst gut zu beschreiben („primitive Periode“).

Funktion mit primitiver Periode  $P$

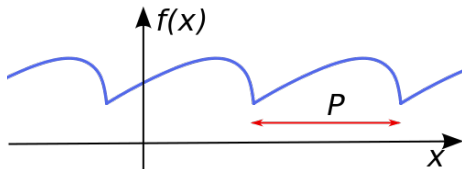


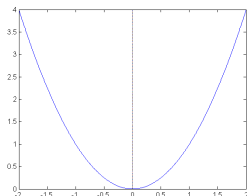
Bild: Oleg Alexandrov, Wikimedia Commons

Q! Sind folgende Funktionen periodisch? Wenn ja, geben Sie eine Periode, wenn möglich die primitive Periode an.

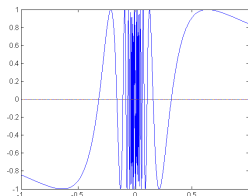
$$f_1(x) = \cos(2x), \quad f_2(x) = |x|, \quad f_3(x) = \sin x + \cos x, \quad f_4(x) = 42.$$

# Grenzwerte reeller Funktionen

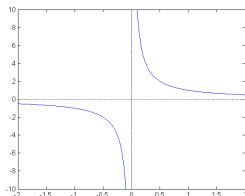
Betrachten wir folgende drei Funktionen:



$$f_1(x) = x^2,$$



$$f_2(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0),$$



$$f_3(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Offenbar zeigen die Funktionen bei Annäherung der  $x$ -Werte an den Nullpunkt völlig unterschiedliches Verhalten. Wir wollen ein mathematisches Instrument entwickeln, dies näher zu beschreiben.

### Definition 4.8

Eine Zahl  $\xi \in \mathbb{R}$  heißt **Häufungspunkt** der Menge  $M \subset \mathbb{R}$ , wenn es eine Folge  $(x_n)$  mit Gliedern aus  $M$  gibt mit

$$x_n \rightarrow \xi \text{ für } n \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad x_n \neq \xi \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Einem Häufungspunkt kann man sich also innerhalb der Menge  $M$  beliebig weit annähern, ohne ihn selbst zu erreichen.

Ein Häufungspunkt kann selbst zur Menge gehören, muss es aber nicht.



**Beispiele:** Die für uns relevanten Beispiele für  $M$  sind vor allem Intervalle.

Die Menge der Häufungspunkte des offenen Intervalls  $(a, b)$  ist zum Beispiel das abgeschlossene Intervall  $[a, b]$  (vgl. Skizze S. 94)

Q! Man bestimme die Häufungspunkte der Mengen

$$M_1 = (-\infty, 42),$$

$$M_2 = [a, b), \quad (a < b)$$

$$M_3 = (0, 1] \cup \{2\},$$

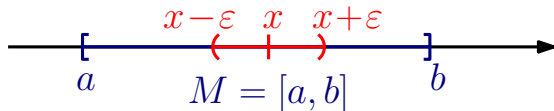
und 
$$M_4 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

# Grenzwerte reeller Funktionen

## Innere Punkte

### Definition 4.9

Eine Zahl  $x \in M$  heißt **innerer Punkt** der Menge  $M \subset \mathbb{R}$ , wenn es ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass  $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset M$ .



Von einem inneren Punkt aus kann man sich also ein kleines Stück „nach rechts und nach links bewegen“, ohne die Menge  $M$  zu verlassen.

Q! Man bestimme die inneren Punkte der Mengen

$$M_1 = (a, b), \quad M_2 = [a, b] \quad (\text{mit } a < b) \quad \text{und} \quad M_3 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

### Definition 4.10

Eine Zahl  $x \in M$  heißt **isolierter Punkt** der Menge  $M \subset \mathbb{R}$ , wenn es ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass  $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap M = \{x\}$  gilt.



Isolierte Punkte gehören also selbst zur Menge, haben aber zum Rest derselben einen positiven Abstand.

Q! Man bestimme, falls vorhanden, die isolierten Punkte der Mengen

$$M_1 = (a, b),$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{R},$$

$$M_2 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R},$$

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

# Grenzwerte reeller Funktionen

## Grenzwertbegriff

Nun können wir das Verhalten einer Funktion bei Annäherung an einen Häufungspunkt des Definitionsbereichs näher beschreiben.

### Definition 4.11 (Grenzwert einer Funktion)

Sei  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion und  $\xi \in \mathbb{R}$  Häufungspunkt des Definitionsbereichs  $D_f$ .

Die Zahl  $a$  heißt **Grenzwert** von  $f$  für  $x$  gegen  $\xi$ , wenn für alle Folgen  $(x_n) \subset D_f$  mit

$$x_n \rightarrow \xi \text{ für } n \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad x_n \neq \xi \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad (4.2)$$

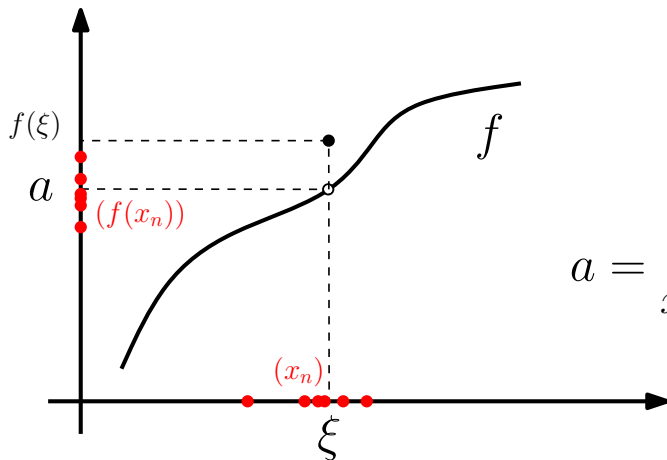
gilt:

$$f(x_n) \rightarrow a \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

**Schreibweise:**  $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = a$  oder  $f(x) \rightarrow a$  für  $x \rightarrow \xi$ .

# Grenzwerte reeller Funktionen

## Skizze zur Definition



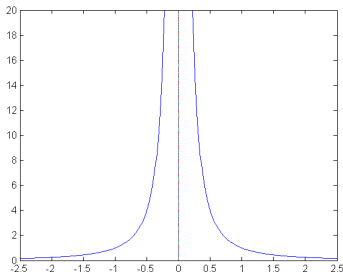
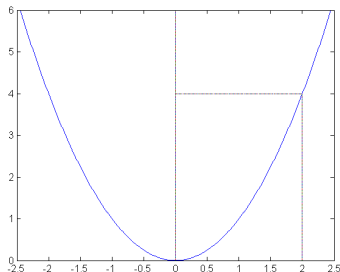
$$a = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$$

Definition 4.11 lässt sich problemlos auf die Fälle  $x \rightarrow \pm\infty$  und  $a = \pm\infty$  erweitern. In letzterem Fall sprechen wir von bestimmter Divergenz.

# Grenzwerte reeller Funktionen

## Beispiele

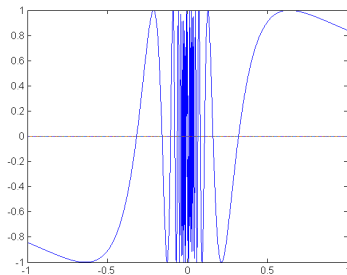
- $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ , denn für jede Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \rightarrow 2$  [also auch für die mit  $x_n \neq 2 \forall n \in \mathbb{N}$ ] gilt  $x_n^2 \rightarrow 4$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ , denn für alle Folgen  $(x_n)$  mit  $x_n \rightarrow 0$  und  $x_n \neq 0 (n \in \mathbb{N})$  gilt  $x_n^2 > 0$  und  $x_n^2 \rightarrow 0$ , d.h.  $\frac{1}{x_n^2} \rightarrow \infty$ .



# Grenzwerte reeller Funktionen

## Beispiele

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , existiert nicht. Beispielsweise gelten für  $x_n = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$  die Beziehungen  $x_n \rightarrow 0$  und  $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi = (-1)^n$ .



**Achtung:** Das heißt nicht, dass keine konvergenten Folgen von Funktionswerten im Kontext von Definition 4.11 existieren. Für  $x_n = \frac{1}{n\pi}$  gelten z. B.  $x_n \rightarrow 0$  und  $\sin(1/x_n) = \sin n\pi = 0 \rightarrow 0$ .

Es genügt aber **ein** Gegenbeispiel, um die Konvergenz auszuschließen; außerdem müssen alle solche Grenzwerte übereinstimmen.

Q! Existieren folgende Grenzwerte? Wenn ja, bestimmen Sie sie.

- $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 2x^2 + 1),$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 - 4},$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x},$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}.$

Man zeichne Skizzen der betreffenden Funktionsgraphen.

# Grenzwerte reeller Funktionen

## Einseitige Grenzwerte

Lässt man in Definition 4.11 in (4.2) statt Folgen  $(x_n)$  mit  $x_n \neq \xi$  nur Folgen mit  $x_n > \xi$  (bzw.  $x_n < \xi$ ) zu, so entsteht ein **rechtsseitiger (linksseitiger) Grenzwert**.

**Schreibweise:** Für den rechtsseitigen Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = a \quad \text{oder} \quad f(x) \rightarrow a \text{ für } x \rightarrow \xi^+ .$$

bzw. für den linksseitigen Grenzwert:

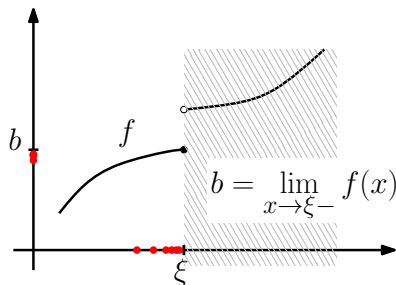
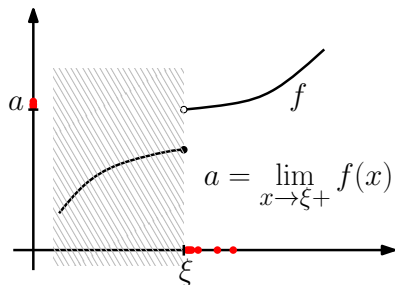
$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = a \quad \text{oder} \quad f(x) \rightarrow a \text{ für } x \rightarrow \xi^- .$$

Dabei ist vorauszusetzen, dass man sich dem Punkt  $\xi$  von rechts (links) aus  $D_f$  heraus nähern kann, d. h. dass  $\xi$  Häufungspunkt von  $D_f \cap (\xi, \infty)$  (bzw.  $D_f \cap (-\infty, \xi)$ ) ist.

# Grenzwerte reeller Funktionen

## Einseitige Grenzwerte

Einseitige Grenzwerte sind somit einfach die Grenzwerte der auf  $D_f \cap (\xi, \infty)$  bzw.  $D_f \cap (-\infty, \xi)$  eingeschränkten Funktion  $f$ .



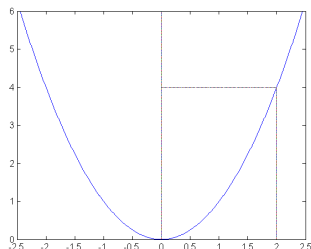
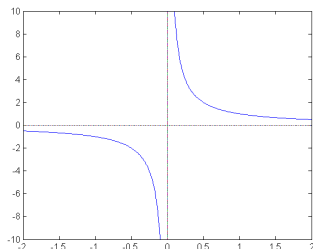
Bei der Untersuchung einseitiger Grenzwerte lässt man also jeweils den im grauschraffierten Teil liegenden Teil der Funktion unbeachtet.

# Grenzwerte reeller Funktionen

## Einseitige Grenzwerte

### Beispiele:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ , denn für jede Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \rightarrow 0$  mit  $x_n > 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) gilt  $\frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$ ,
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ , denn für jede Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \rightarrow 0$  mit  $x_n < 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) gilt  $\frac{1}{x_n} \rightarrow -\infty$ ,
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ .



### Weitere Beispiele:

Q! Existieren die folgenden einseitigen Grenzwerte? Wenn ja, wie lauten sie?

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x|$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x|$ ,
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x$ .

Dabei bezeichnet  $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die sogenannte Signum- oder Vorzeichenfunktion:

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} -1, & \text{für } x < 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \\ 1, & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Zeichnen Sie wieder Bilder der Funktionsgraphen.

# Grenzwerte reeller Funktionen

## Einseitige Grenzwerte

Zwischen dem Grenzwert und den einseitigen Grenzwerten gibt es eine Beziehung, die sofort einleuchtet:

### Satz 4.12

Sei  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\xi$  ein Häufungspunkt sowohl von  $D_f \cap (\xi, \infty)$  als auch von  $D_f \cap (-\infty, \xi)$ . Dann gilt:

Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$  existiert genau dann, wenn die beiden Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x)$  existieren **und** übereinstimmen.

Q! Existiert  $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$ , und was ergibt sich ggf. für ein Wert? Argumentieren Sie mit Satz 4.12 und den Erkenntnissen vom Beispiel auf Seite 106.

Da Grenzwerte von Funktionen auf Grenzwerte von Folgen zurückführen, übertragen sich die Grenzwertsätze aus Abschnitt 2.

### Satz 4.13 (Grenzwertsätze für reelle Funktionen)

*Unter Voraussetzung der Existenz der betreffenden Grenzwerte gelten jeweils für  $x \rightarrow \xi$  die Regeln:*

- $\lim(cf)(x) = c \lim f(x)$  für alle  $c \in \mathbb{R}$ ,
- $\lim(f \pm g)(x) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ ,
- $\lim(f \cdot g)(x) = (\lim f(x)) \cdot (\lim g(x))$ ,
- $\lim\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ , falls  $\lim g(x) \neq 0$ ,
- $f \leq g \Rightarrow \lim f(x) \leq \lim g(x)$ .

*Hierbei ist auch  $\xi = \pm\infty$  erlaubt. Für einseitige Grenzwerte gelten die Regeln in analoger Weise.*

# Grenzwerte reeller Funktionen

## Rechnen mit Grenzwerten

Mit den auf Seite 43 getroffenen Definitionen ( $\infty + \infty = \infty$ ,  $\infty \cdot \infty = \infty$  etc.) gelten die Aussagen von Satz 4.13 auch für den Fall bestimmter Divergenz.

Wie schon bei den Folgen muss aber darauf geachtet werden, dass die entstehenden Ausdrücke sinnvoll definiert sind.

Q! Bestimmen Sie (falls existent) folgende Grenzwerte:

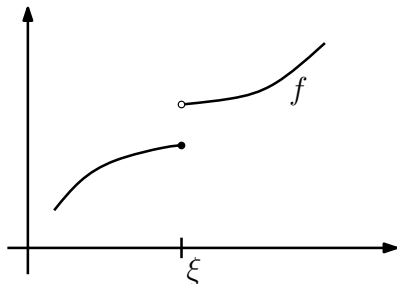
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + x)$ ,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + \frac{1}{x})$ ,
- $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \cos(\pi x) + \frac{x^2 - 1}{x + 1} \right)$ ,
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \sin \frac{1}{x} \right)$ .

Argumentieren Sie beim Kosinus mit der graphischen Darstellung.

### Definition 4.14

Existieren zu einer reellen Funktion die beiden Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x)$  und

$\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x)$ , und sind sie **endlich aber verschieden**, so nennt man  $\xi$  eine **Sprungstelle** von  $f$ .



Ein bemerkenswertes Ergebnis gilt nun für monotone Funktionen:

### Satz 4.15

Seien  $I = (a, b)$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  monoton auf  $I$  und  $\xi \in I$ . Dann existieren  $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$  und es gelten

$$-\infty < \lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) \leq f(\xi) \leq \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) < \infty,$$

wenn  $f$  monoton wachsend ist, und

$$\infty > \lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) \geq f(\xi) \geq \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) > -\infty,$$

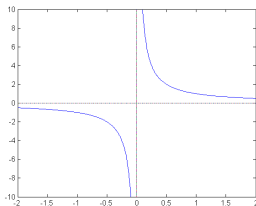
wenn  $f$  monoton fallend ist.

# Grenzwerte reeller Funktionen

## Unendlichkeitsstellen

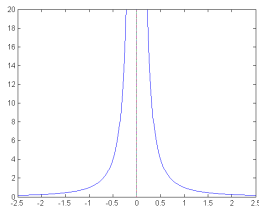
Gilt für eine reelle Funktion  $f$  mindestens eine der Beziehungen  $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = \pm\infty$  oder  $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) \pm \infty$ , so nennt man  $\xi$  eine Unendlichkeitsstelle von  $f$ .

Vor allem bei rationalen Funktionen  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , wobei  $p$  und  $q$  Polynome sind, spricht man auch von **Polstellen**.



$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ (links)}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \text{ (rechts)}$$



**Achtung:** Der Sprachgebrauch in der Literatur ist, was Unendlichkeits- und Polstellen betrifft, nicht einheitlich.

# Stetigkeit

In vielen naturwissenschaftlichen Modellen führen kleine Änderungen an den Daten (z.B. durch Rundungs-/Messfehler) auch nur zu kleinen Änderungen in den Ergebnissen nach Anwendung des Modells.

Mathematisch wird dieser Zusammenhang durch das Konzept der Stetigkeit erfasst. Dieses geht auf Cauchy und Bolzano zurück und wurde später von Weierstraß präzisiert.



Augustin-Louis Cauchy  
(1789–1857)



Bernard Bolzano  
(1781–1848)



Karl Weierstraß  
(1815–1897)

### Definition 4.16 (Stetigkeit)

Eine reelle Funktion  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **stetig** an der Stelle  $\xi \in D_f$ , wenn für alle Folgen  $(x_n) \subset D_f$  mit  $x_n \rightarrow \xi$  die zugehörigen Funktionswerte konvergieren mit  $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$ .

$f$  heißt stetig in  $M \subseteq D_f$ , wenn  $f$  an jeder Stelle  $\xi \in M$  stetig ist.

Als Abgrenzung zum Grenzwertbegriff (Def. 4.11) beachte man, dass hier  $\xi \in D_f$  gelten **muss**, und auch Folgenglieder mit  $x_n = \xi$  zugelassen sind.

### Beispiel

- Die Funktion  $f(x) = x^2$  ist stetig an der Stelle  $\xi = 2$ , denn für jede Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \rightarrow 2$  gilt:  $f(x_n) = x_n^2 \rightarrow 4 = f(2)$ .
- Die Funktion  $f(x) = x^2$  ist sogar stetig auf ganz  $\mathbb{R}$ , denn für beliebiges (festes)  $\xi \in \mathbb{R}$  und jede Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \rightarrow \xi$  gilt:  $f(x_n) = x_n^2 \rightarrow \xi^2 = f(\xi)$ .

Ein sorgfältiger Vergleich der Definitionen 4.16 und 4.11 liefert folgenden Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Grenzwert:

### Satz 4.17

Sei  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion und  $\xi \in D_f$  ein Häufungspunkt\* von  $D_f$ .  
Dann gilt:

$$f \text{ ist stetig in } \xi \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi). \quad (4.3)$$

Der Grenzwert von  $f$  für  $x \rightarrow \xi$  muss also mit dem Funktionswert an der Stelle  $\xi$  übereinstimmen.

\*) **Anmerkung:**

In isolierten Punkten des Definitionsbereichs sind Funktionen dagegen **immer** stetig. Für die Praxis ist dies jedoch belanglos.

In der Praxis verwendet man zum Testen auf Stetigkeit statt (4.3) auch häufig die Beziehung

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$$

die durch Kombination von (4.3) mit Satz 4.12 entsteht.

Q! Man untersuche die Funktion  $f(x) = |x|$  auf Stetigkeit im Punkt  $\xi = 0$ . Was lässt sich über die Stetigkeit von  $f$  auf  $\mathbb{R}$  sagen?

Q! Für welche Wahl des Parameters  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist die folgende Funktion stetig?

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \alpha x, & \text{für } x < 0; \\ x^2 + \alpha^2, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Häufig wird die Stetigkeit auch über eine zu Definition 4.16 äquivalente Formulierung eingeführt:

### Satz 4.18 ( $\epsilon$ - $\delta$ -Version der Stetigkeit)

*Eine reelle Funktion  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann stetig in  $\xi \in D_f$ , wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass*

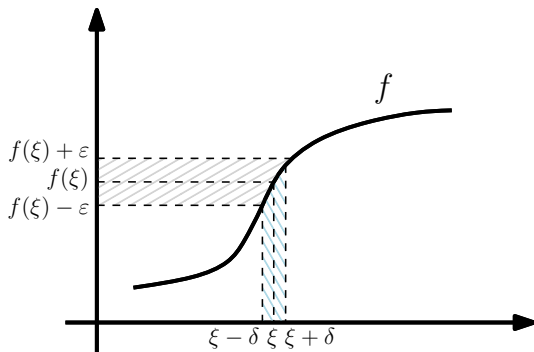
$$x \in D_f \text{ und } |x - \xi| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(\xi)| < \epsilon.$$

Für konkrete Rechnungen sind Definition 4.16 oder Satz 4.17 häufig bequemer (überzeugen Sie sich am Beispiel von S. 115 selbst).

Allerdings vermittelt uns Satz 4.18 die bessere Vorstellung, was Stetigkeit praktisch bedeutet.

# Stetigkeit

## Graphische und sprachliche Interpretation



- (Hinreichend) kleine Änderungen an den Argumenten führen zu (beliebig) kleinen Änderungen an den Funktionswerten.
- Die Funktionswerte lassen sich durch hinreichend feines „Justieren“ der Argumente beliebig fein „einstellen“.

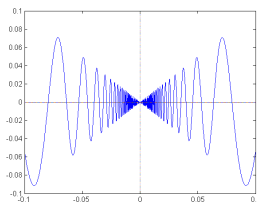
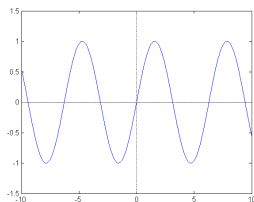
# Stetigkeit

## Eine weitere anschauliche Interpretation

Der Graph einer auf einem Intervall stetigen Funktion bildet eine zusammenhängende Kurve. (Achtung: Zusammenhang mathematisch zu definieren ist gar nicht so einfach!)

Daher wird manchmal salopp geschrieben, dass man Funktionsgraphen stetiger Funktionen zeichnen kann, „ohne den Stift abzusetzen“.

Dies ist unmathematisch, unsauber (es gibt zusammenhängende Kurven, die man nicht zeichnen kann, vgl. Bild rechts), und erfasst auch nicht das gesamte Wesen der Stetigkeit. Trotzdem liefert es uns eine gewisse Vorstellung.



$$f(x) = \sin x.$$

$$g(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Der folgende Satz ergibt sich durch Kombination der Grenzwertsätze für Funktionen (Satz 4.13) mit Definition 4.16.

### Satz 4.19

*Sind  $f, g$  stetig in  $\xi$ , dann sind auch  $f + g, f - g, fg$  stetig in  $\xi$ . Gilt  $g(\xi) \neq 0$ , dann ist auch  $f/g$  stetig in  $\xi$ .*

*Ist  $f$  stetig in  $\xi$  und ist  $g$  stetig in  $f(\xi)$ , so ist  $g \circ f$  stetig in  $\xi$ .*

**Beispiel:** Die Funktionen

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = |x| \quad \text{und} \quad f_3(x) = 42$$

sind auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig. Daher sind beispielsweise auch

$$g_1(x) = 42 \cdot |x| \cdot x^2 \quad \text{und} \quad g_2(x) = \frac{1}{42}|x| + x^2 \quad \text{und} \quad g_3(x) = x^6$$

stetig auf  $\mathbb{R}$ .

Für Umkehrfunktionen gilt:

### Satz 4.20

*Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Die Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  besitze eine Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ . Ist  $f$  stetig in  $I$ , so ist  $f(I)$  ein Intervall und  $f^{-1}$  stetig in  $f(I)$ .*

Da – wie eben bemerkt – das Bild eines Intervalls unter einer stetigen Funktion wieder ein Intervall ist, ergibt sich sofort:

### Satz 4.21 (Zwischenwertsatz)

*Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann gibt es zu jedem  $w$ , das zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  liegt, ein  $z \in [a, b]$  mit  $f(z) = w$ .*

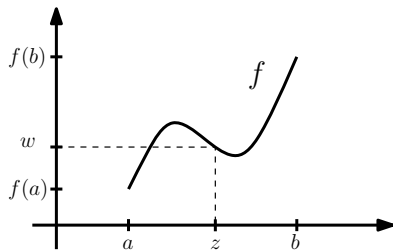
Anders ausgedrückt: Eine stetige Funktion  $f$  nimmt jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an.

Ein Spezialfall von Satz 4.21 ist:

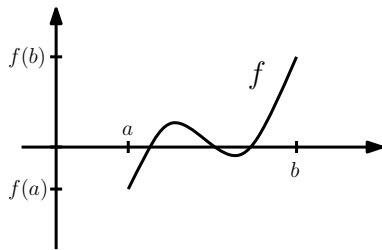
### Folgerung 4.22 (Nullstellensatz)

Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, und gilt  $f(a) > 0$  und  $f(b) < 0$  (bzw.  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$ ), so hat  $f$  mindestens eine Nullstelle in  $(a, b)$ .

### Visualisierungen



Zwischenwertsatz



Nullstellensatz

# Stetigkeit

## Exkurs: Intervallhalbierungsverfahren

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f(a)f(b) < 0$  (verschiedenes Vorzeichen). Nach dem Nullstellensatz gibt es in  $(a, b)$  eine Nullstelle  $z$  von  $f$ .

### Algorithmus:

Setze  $a_1 = a$  und  $b_1 = b$ .

Für  $n = 1, 2, \dots$

$$h = (a_n + b_n)/2.$$

Ist  $f(h) = 0$ , so haben wir eine Nullstelle von  $f$  gefunden.

Ist  $f(h)f(a_n) > 0$ , setze  $a_{n+1} = h$ ,  $b_{n+1} = b_n$ .

Ist  $f(h)f(a_n) < 0$ , setze  $a_{n+1} = a_n$ ,  $b_{n+1} = h$ .

Die entstehenden Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergieren gegen einen gemeinsamen Grenzwert  $z$ , der eine Nullstelle von  $f$  ist.

Q! Überlegen Sie sich, warum das so ist.

# Stetigkeit

## Beispiel

Gesucht ist eine Lösung der Gleichung  $-x = e^x$ , d. h. eine Nullstelle von  $f(x) = x + e^x$ . Eine Lösung durch Umstellen nach  $x$  ist hier unmöglich.

Wir verwenden das Intervallhalbierungsverfahren. Da  $f(0) = 1$  und  $f(-1) = -0.6321$ , können wir mit  $a = -1$  und  $b = 0$  starten. Natürlich wird man das Verfahren auf einem Rechner implementieren.

Ergebnisse:

| $n$      | $a_n$          | $b_n$          | $b_n - a_n$                                   |
|----------|----------------|----------------|---|
| 1        | -1             | 0              | 1   |
| 2        | -1             | -0.5           | $\frac{1}{2} = 0.5$                           |
| $\vdots$ | $\vdots$       | $\vdots$       | $\vdots$                                      |
| 11       | -0.56738281... | -0.56640625    | $\frac{1}{2^{10}} \approx 9.77 \cdot 10^{-4}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$       | $\vdots$       | $\vdots$                                      |
| 21       | -0.56714344... | -0.56714248... | $\frac{1}{2^{20}} \approx 9.54 \cdot 10^{-7}$ |

### Satz 4.23

Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann gibt es

- ein  $x_{\max} \in [a, b]$  mit  $f(x_{\max}) \geq f(x)$  für alle  $x \in [a, b]$
- ein  $x_{\min} \in [a, b]$  mit  $f(x_{\min}) \leq f(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ .

Anders ausgedrückt: Jede auf  $[a, b]$  stetige Funktion nimmt auf  $[a, b]$  ihr Maximum und ihr Minimum an.

**Vorsicht:** Die Aussage wird falsch, wenn der Definitionsbereich von  $f$  nicht abgeschlossen oder unbeschränkt ist.

Q! An welchen Stellen nimmt die Funktion  $f : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  Maximum und Minimum an? Wie ändert sich die Situation, wenn man  $f$  stattdessen auf  $(-2, 4)$ ,  $[-2, 4)$  oder  $[-2, 4]$  betrachtet?

Eine Stelle  $\xi \in D_f$ , an der eine Funktion  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  nicht stetig ist, heißt **Unstetigkeitsstelle** von  $f$ .

Handelt es sich dagegen bei  $\xi$  um eine Definitionslücke, kann man lediglich über stetige Fortsetzbarkeit von  $f$  entscheiden.

### Beispiel:

- $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ , ist auf dem ganzen Definitionsbereich stetig, aber in 0 nicht stetig fortsetzbar.

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 42, & x = 0, \end{cases}$

ist dagegen unstetig in 0 und sonst stetig.

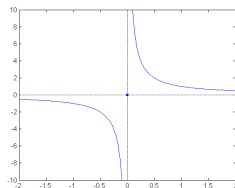
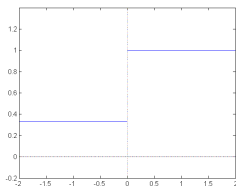
**Achtung:** In der Literatur werden die Begriffe „unstetig“ und „nicht stetig fortsetzbar“ mitunter unschön vermengt.

# Stetigkeit

## Typische Vertreter von Unstetigkeitsstellen

- Sprungstellen: treten z.B. bei der Modellierung von Ein- und Ausschaltvorgängen oder von Materialparametern an Materialgrenzen auf,
- Unendlichkeitsstellen/Pole: treten z.B. bei der Beschreibung von Kräften und deren Potentialen auf, z.B. bei Gravitations- und Coulomb-Kraft ( $F(r) = c_1 r^{-2}$ ,  $V(r) = c_2 r^{-1}$ ).

(Dies sind jedoch keineswegs die einzigen Arten von Unstetigkeiten.)



**Regel:** Tritt in einem mathematischen Modell eine Unstetigkeit (oder fehlende stetige Fortsetzbarkeit) auf, sollte sich auch der Praktiker immer Gedanken über evtl. Auswirkungen machen.

Wir werden in diesem Abschnitt ein Standardrepertoire von Funktionen zur Verfügung stellen, die in Mathematik und Naturwissenschaften häufig benötigt werden.

Bei all diesen Beispielen handelt es sich um stetige Funktionen.

**Polynome:** Eine Funktion der Form

$$x \mapsto f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \neq 0$ , heißt **ganzrational** oder **Polynom**. Die Zahlen  $a_i$  heißen **Koeffizienten** von  $f$ , die Zahl  $n$  heißt **Grad** von  $f$  (Abkürzung:  $\text{grad}(f)$ ).

Polynome vom Grad 1,

$$f(x) = a_0 + a_1x,$$

heißen (**affin**) **lineare** Funktionen. Der Graph von  $f$  ist eine Gerade durch  $(0, a_0)$  mit Anstieg  $a_1$ .

In Vorbereitung auf die Differentialrechnung bemerken wir:

- Zu gegebenem Punkt  $(x_0, f(x_0))$  und Anstieg  $a_1$  erhält man die lineare Funktion

$$f(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0).$$

- Durch zwei verschiedene gegebene Punkte  $(x_0, f(x_0))$  und  $(x_1, f(x_1))$  „führt“ die lineare Funktion

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Polynome vom Grad 2,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = a_2 \left( x + \frac{a_1}{2a_2} \right)^2 + \left( a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} \right),$$

heißen **quadratische** Funktionen.

Sie besitzen als Graph eine Parabel mit Scheitel  $(x_0, y_0)$ ,

$$x_0 = -\frac{a_1}{2a_2}, \quad y_0 = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2},$$

die für  $a_2 > 0$  nach oben und für  $a_2 < 0$  nach unten offen ist.

Q! Lineare und quadratische Funktionen sollten aus Schulwissen oder Vorkurs gut vertraut sein. Schließen Sie evtl. Lücken selbständig.

# Elementare Funktionen

## Nullstellen von Polynomen

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (Sätze 1.26/29) existiert zu einem Polynom vom Grad  $n$  eine Faktorisierung

$$f(x) = a_n \prod_{j=1}^k (x - \lambda_j)^{\mu_j} \prod_{j=1}^m (x^2 + p_j x + q_j)^{\nu_j}, \quad (4.4)$$

wobei

$$\sum_{j=1}^k \mu_j + 2 \sum_{j=1}^m \nu_j = n.$$

Die quadratischen Faktoren besitzen keine reellen Nullstellen, und die Ausdrücke in den Klammern sind paarweise verschieden.

Die Zahlen  $\lambda_j$  sind gerade die (reellen) Nullstellen von  $f$ . Die Zahl  $\mu_j$  heißt **Vielfachheit** der Nullstelle  $\lambda_j$ , die Zahl  $\nu_j$  ist die Vielfachheit der beiden konjugiert komplexen Nullstellen des entsprechenden quadratischen Faktors.

Jedes Polynom von ungeradem Grad besitzt somit mindestens eine (reelle) Nullstelle. Ein Polynom vom Grad  $n$  besitzt höchstens  $n$  verschiedene Nullstellen.

Wenn  $\text{grad}(f) > 0$ , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_n > 0, \\ -\infty, & \text{falls } a_n < 0 \end{cases}$$

sowie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } n \text{ gerade und } a_n > 0 \\ & \text{oder falls } n \text{ ungerade und } a_n < 0, \\ -\infty, & \text{falls } n \text{ ungerade und } a_n > 0 \\ & \text{oder falls } n \text{ gerade und } a_n < 0. \end{cases}$$

Eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n} = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} \quad (4.5)$$

(mit  $a_m \neq 0$ ,  $b_n \neq 0$ ) heißt **(gebrochen) rationale** Funktion.

$$\begin{array}{ll} p_m(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m & \text{heißt } \mathbf{Zählerpolynom} \text{ von } f, \\ q_n(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n & \text{heißt } \mathbf{Nennerpolynom} \text{ von } f. \end{array}$$

Rationale Funktionen sind bis auf die Nullstellen des Nennerpolynoms  $q_n$  (Pole, Lücken) überall definiert.

# Elementare Funktionen

## Null- und Polstellen rationaler Funktionen

Wir setzen im weiteren voraus, dass Zählerpolynom  $p$  und Nennerpolynom  $q$  **keine** gemeinsamen Nullstellen haben\*.

Die Nullstellen von  $f$  sind dann gerade die Nullstellen des **Zähler**polynoms  $p$ .

Ist  $x_0 \in D_f$  eine Nullstelle (mit Vielfachheit  $k$ ) des **Nenner**polynoms  $q$ , so heißt  $x_0$  **Pol** ( $k$ -ter Ordnung) von  $f$ . Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty.$$

Dabei hat  $f$  bei  $x_0$

- einen Vorzeichenwechsel, wenn  $k$  ungerade ist,
- keinen Vorzeichenwechsel, wenn  $k$  gerade ist.

\*) Andernfalls kann man die betreffenden Linearfaktoren kürzen und „füllt“ ggf.

die Definitionslücke „auf“. Betrachte z. B.  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ .

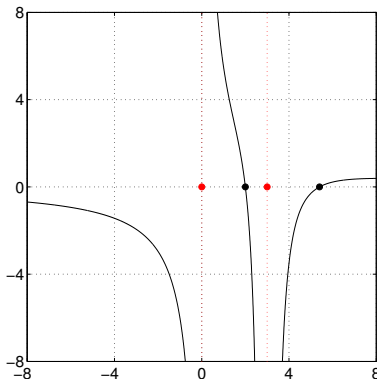
# Elementare Funktionen

## Null- und Polstellen rationaler Funktionen

Q! Interpretieren Sie das folgende Schaubild der Funktion

$$f(x) = \frac{5x^2 - 37x + 54}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \frac{5(x-2)(x-27/5)}{x(x-3)^2}$$

im Hinblick auf die gewonnenen Erkenntnisse über Null- und Polstellen.



# Elementare Funktionen

## Verhalten rationaler Funktionen im Unendlichen

Seien  $m$  der Grad des Zählerpolynoms  $p$  und  $n$  der Grad des Nennerpolynoms  $q$ . Dann gilt mit  $a_m, b_n$  aus (4.5):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } m < n, \\ a_m/b_n, & \text{falls } m = n. \end{cases}$$

Falls  $m \geq n$ , so gibt es Polynome  $s$  und  $t$  mit  $\text{grad}(s) = m - n$  und  $\text{grad}(t) < n$ , so dass

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{t(x)}{q(x)}. \quad (4.6)$$

Insbesondere gilt für  $m > n$ , dass

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x) - s(x)| = \lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - s(x)| = 0.$$

Man sagt,  $s$  ist **Asymptote** von  $f$  für  $|x| \rightarrow \infty$ ; die Graphen von  $f$  und  $s$  kommen sich "im Unendlichen beliebig nahe".

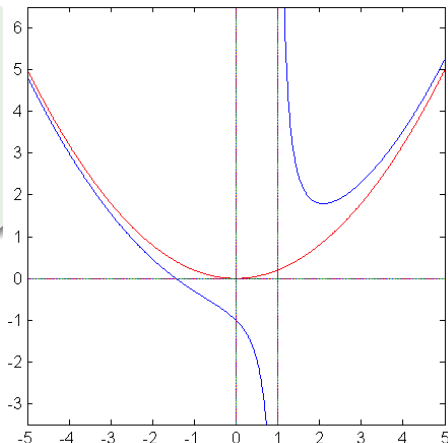
# Elementare Funktionen

## Verhalten rationaler Funktionen im Unendlichen

Q! Interpretieren Sie das folgende Schaubild (blau) der Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 5}{5x - 5} = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{x-1}$$

im Hinblick auf die Asymptotik im Unendlichen und an den Polen.



# Elementare Funktionen

## Exkurs: Polynomdivision/Euklidischer Algorithmus

Die Polynome  $s$  und  $t$  in (4.6) können durch **Polynomdivision** berechnet werden. Diese lernt man am besten am Beispiel:

$$\begin{array}{r} (3x^4 + 7x^3 + x^2 + 5x + 1) : (x^2 + 1) = 3x^2 + 7x - 2 \\ \underline{3x^4 \phantom{+ 7x^3} + 3x^2} \phantom{+ 5x + 1} \\ 7x^3 - 2x^2 + 5x + 1 \\ \underline{7x^3 \phantom{- 2x^2} + 7x} \phantom{+ 1} \\ -2x^2 - 2x + 1 \\ \underline{-2x^2 \phantom{- 2x} - 2} \phantom{+ 1} \\ -2x + 3 \end{array}$$

Ergebnis:

$$\frac{3x^4 + 7x^3 + x^2 + 5x + 1}{x^2 + 1} = (3x^2 + 7x - 2) + \frac{-2x + 3}{x^2 + 1}.$$

Allerdings sind in modernen Zeiten auch Computeralgebrasysteme (CAS) für solche Zwecke zuverlässige und empfehlenswerte Helfer.

# Elementare Funktionen

## Wurzel- und Potenzfunktionen

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist die Potenzfunktion  $f(x) = x^n$  eine bijektive Abbildung von  $[0, \infty)$  auf  $[0, \infty)$ . Ihre Umkehrfunktion

$$g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n},$$

heißt  $n$ -te **Wurzel** von  $x$ .

Für  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n} \quad (x \neq 0).$$

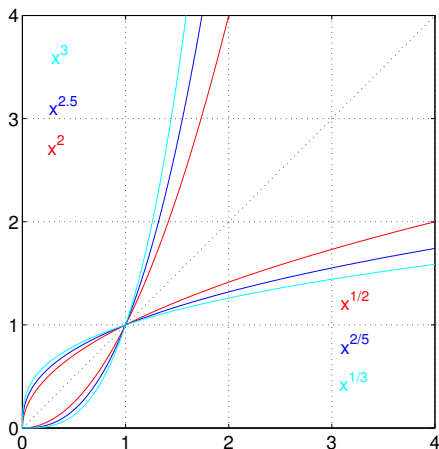
Allgemeiner erhalten wir Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten über

$$g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto \sqrt[n]{x^m} =: x^{m/n} \quad (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}).$$

Wie man die Funktion  $x \mapsto x^r$  für beliebiges **reelles**  $r$  erklärt, werden wir im nächsten Abschnitt erfahren.

# Elementare Funktionen

## Wurzel- und Potenzfunktionen, Graphische Darstellung



Dargestellt sind einige Potenzfunktionen mit den zugehörigen Umkehrungen (jeweils gleiche Farbe).

Die **Exponentialfunktion** ist durch

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

definiert und wird mit  $f(x) = e^x$  oder  $f(x) = \exp(x)$  bezeichnet.

Wichtigste Eigenschaften:

- $e^{x+y} = e^x e^y$ ,  $(e^x)^y = e^{xy}$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ ,
- $e^x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $f(x) = e^x$  ist streng monoton wachsend auf  $\mathbb{R}$ ,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

Die Exponentialfunktion spielt eine zentrale Rolle in Wachstumsmodellen und bei der Lösung linearer Differentialgleichungen.

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

$$\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln x,$$

heißt **natürlicher Logarithmus** oder Logarithmus zur Basis  $e$ .

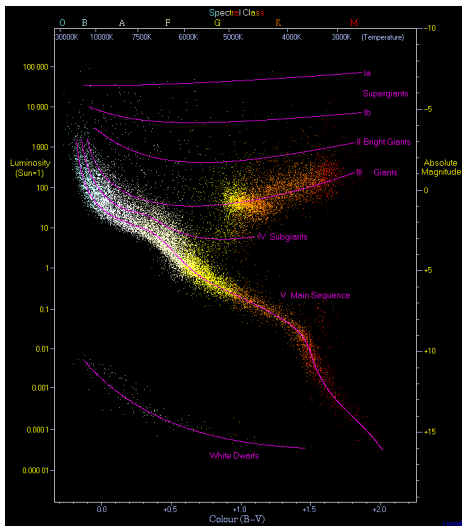
Wichtigste Eigenschaften:

- $\ln(e^x) = x$  (für  $x \in \mathbb{R}$ ) und  $e^{\ln x} = x$  (für  $x > 0$ ),
- $\ln x \geq 0$  für  $x \geq 1$  und  $\ln x < 0$  für  $0 < x < 1$ ,
- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ ,  $\ln(x^y) = y \ln x$ ,
- $x \mapsto \ln x$  ist streng monoton wachsend auf  $\mathbb{R}$ ,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ .

Logarithmen werden häufig benutzt, wenn Beobachtungsgrößen über viele Größenordnungen variieren. (Schalldruckpegel, pH-Wert, Richter-Skala, Leuchtstärke, Sternhelligkeiten, ...)

# Elementare Funktionen

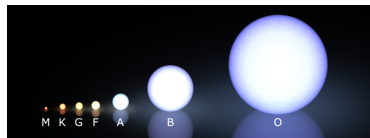
## Beispiel: Hertzsprung-Russell-Diagramm



Dargestellt ist der Logarithmus der Leuchtkraft über dem B-V-Farindex.

Unten: Farb- und Größenvergleich für Hauptreihensterne.

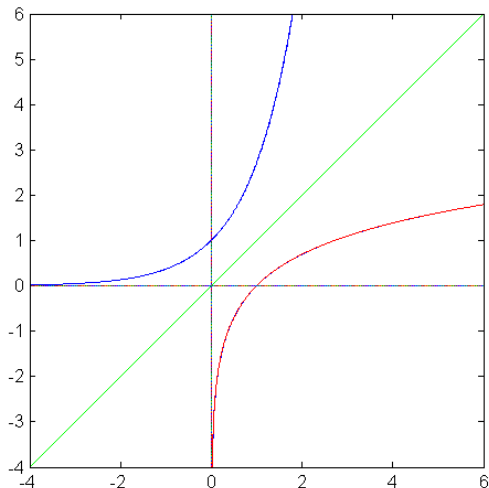
Bilder: Richard Powell und Kieff, Wikimedia Commons



# Elementare Funktionen

Exponential- und Logarithmusfunktionen, graphische Darstellung

Exponentialfunktion (blau) und natürlicher Logarithmus (rot)



# Elementare Funktionen

## Potenzen mit reellem Exponenten

Für  $a > 0$  und  $r \in \mathbb{R}$  definieren wir nun

$$a^r := e^{r \ln a}. \quad (4.7)$$

Damit können wir nun z. B. die Potenzfunktion

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^r := e^{r \ln x},$$

für beliebige reelle Exponenten  $r$  erklären. Desweiteren eröffnet sich die Möglichkeit, Funktionen vom Typ

$$f(x) = a^x \quad (a > 0)$$

zu definieren.

Q! Machen Sie sich klar, dass Definition (4.7) für rationale  $r$  mit der bereits bekannten übereinstimmt.

# Elementare Funktionen

## (Allgemeine) Exponentialfunktion

Für  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , ist

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), \quad x \mapsto a^x := e^{x \ln(a)},$$

die **allgemeine Exponentialfunktion** oder Exponentialfunktion zu Basis  $a$ .

Aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion ergeben sich:

- $a^{x+y} = a^x a^y$ ,  $(a^x)^y = a^{xy}$ ,  $(ab)^x = a^x b^x$ ,
- $a^x > 0$ ,
- $x \mapsto a^x$  ist auf  $\mathbb{R}$  streng monoton wachsend, falls  $a > 1$ ,
- $x \mapsto a^x$  ist auf  $\mathbb{R}$  streng monoton fallend, falls  $0 < a < 1$ ,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$  (wenn  $a > 1$ ),
- $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$  (wenn  $0 < a < 1$ ).

Die Umkehrfunktion von  $f(x) = a^x$  heißt **Logarithmus zur Basis  $a$** :

$$\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a x,$$

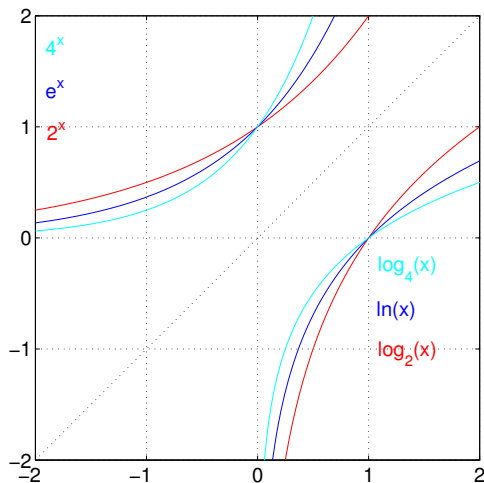
Für  $a = 10$  schreibt man oft  $\lg x$ , für  $a = e$  (siehe oben)  $\ln x$  und für  $a = 2$  auch  $\lg x$ . Wenn nichts anderslautendes dabeisteht ist mit  $\log$  nahezu immer  $\ln$  gemeint.

Es gelten

- $\log_a x = \ln x / \ln a \quad (x > 0)$ ,
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ ,  $\log_a(x^y) = y \log_a x$ ,
- $x \mapsto \log_a x$  ist streng monoton wachsend für  $a > 1$ ,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$  für  $a > 1$ ,
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$  für  $a > 1$ .

# Elementare Funktionen

## Logarithmen, graphische Darstellung



Dargestellt sind Exponentialfunktionen zu verschiedenen Basen mit den zugehörigen Umkehrungen (jeweils gleiche Farbe).

Bei der sauberen analytischen Definition der Sinus- und Kosinusfunktion geht der Mathematiker wie folgt vor:

- Erweitere den Definitionsbereich der Exponentialfunktion auf komplexe Zahlen:

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

- Definiere **Sinus** und **Kosinus** gemäß

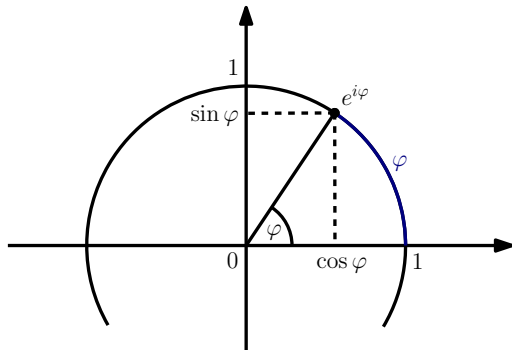
$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], & \cos x &= \operatorname{Re} e^{ix}, \\ \sin : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], & \sin x &= \operatorname{Im} e^{ix}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Damit ergeben sich unmittelbar auch Reihendarstellungen zu Sinus und Kosinus, doch dazu später.

# Elementare Funktionen

## Sinus und Kosinus

Diese Definition ergibt unmittelbar die Eulersche Formel (Kapitel 1, Folie 80), d.h.  $e^{i\varphi}$  für  $\varphi \in \mathbb{R}$  liegt auf dem Einheitskreis. Damit erhält man die gewohnte Darstellung:



Für die meisten Zwecke ist diese Vorstellung ausreichend. Durch Skalieren erhält man die klassischen Winkelbeziehungen im rechtwinkligen Dreieck.

# Elementare Funktionen

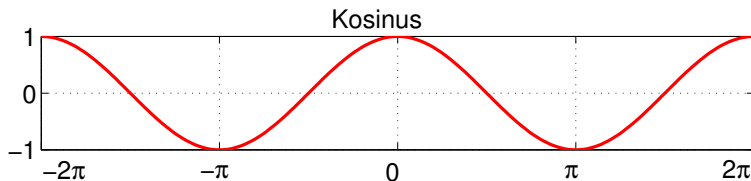
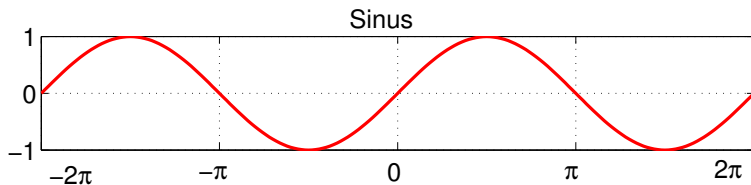
## Eigenschaften von Sinus und Kosinus

- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ,  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ ,  
d.h. Sinus und Kosinus sind  $2\pi$ -periodisch,
- $\sin(-x) = -\sin x$ ,  $\cos(-x) = \cos x$ ,  
d.h. der Sinus ist ungerade, der Kosinus gerade,
- $\sin x = \cos(x - \pi/2)$  und  $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ ,  
d.h. die Graphen sind um  $\pi/2$  gegeneinander verschoben,
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  (Satz des Pythagoras),
- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  und  
 $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = (k + 0.5)\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ ,
- $\sin x$  ist auf  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  streng monoton wachsend und  
 $\cos x$  ist auf  $[0, \pi]$  streng monoton fallend.

Desweiteren gelten die in Abschnitt 1.6 (S. 88 ) kennengelernten Additionstheoreme und Mehrfachwinkelformeln.

# Elementare Funktionen

## Sinus und Kosinus, graphische Darstellung



Der **Tangens** von  $x$  ist definiert durch

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Der **Kotangens** von  $x$  ist definiert durch

$$f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cot x := \frac{\cos x}{\sin x}.$$

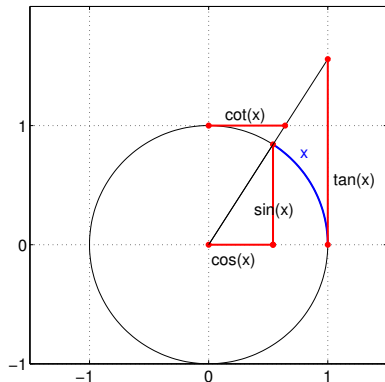
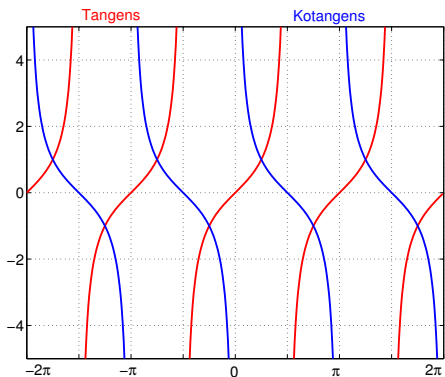
Im Gebrauch ist vor allem der Tangens.

Wichtige Eigenschaften:

- $\tan$  und  $\cot$  sind  $\pi$ -periodische Funktionen,
- $\tan(-x) = -\tan x$  und  $\cot(-x) = -\cot x$ , d. h. beide Funktionen sind ungerade,
- $\tan$  ist auf  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  streng monoton wachsend und  $\cot$  ist auf  $(0, \pi)$  streng monoton fallend.

# Elementare Funktionen

## Tangens und Kotangens, graphische Darstellung



Dargestellt sind die Graphen von Tangens und Kotangens sowie die graphische Interpretation am Einheitskreis.

# Elementare Funktionen

## Arkusfunktionen

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen nennt man **Arkusfunktionen**.

Da die trigonometrischen Funktionen auf  $\mathbb{R}$  nicht bijektiv sind, muss man Einschränkungen auf bestimmte Intervalle betrachten.

Man schränkt Kosinus und Kotangens auf  $[0, \pi]$  sowie Sinus und Tangens auf  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ein, und erhält die Umkehrfunktionen

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y, \quad y \in [0, \pi],$$

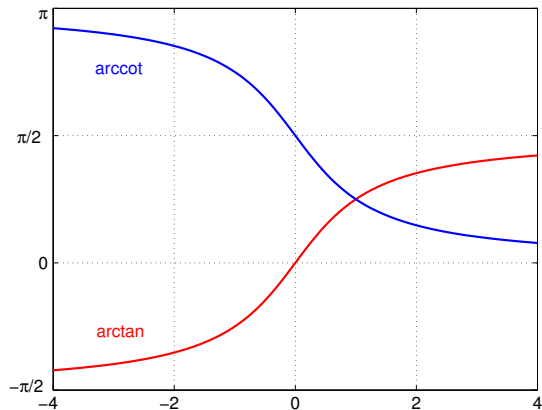
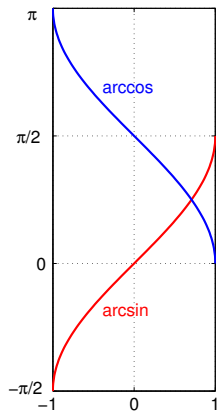
$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \pi], \quad y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow x = \cot y, \quad y \in [0, \pi].$$

mit Namen **Arkussinus**, **Arkuscosinus**, **Arkustangens** und **Arkuskotangens**.

# Elementare Funktionen

## Arkusfunktionen, graphische Darstellung



Graphen sämtlicher Arkusfunktionen.

### Die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

heißen **Sinus hyperbolicus**, **Kosinus hyperbolicus** und **Tangens hyperbolicus**.

Ihre Umkehrfunktionen heißen Areasinus, Areakosinus und Areatangens. (cosh muss dafür auf  $[0, \infty)$  eingeschränkt werden.)

# Elementare Funktionen

## Hyperbel- und Areafunktionen, graphische Darstellung

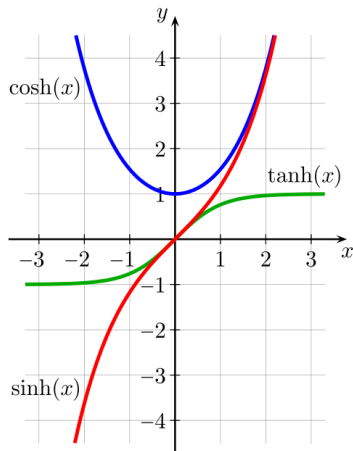


Bild: Wikimedia Commons, Geek3

Beachten Sie die sich aus den Definitionen ergebende Asymptotik.

Hyperbelfunktionen treten mitunter bei der Lösung von Differentialgleichungen auf.

Z.B. kann ein durchhängendes Seil über den Kosinus hyperbolicus beschrieben werden.

# Ziele erreicht?

Sie sollten nun (bzw. nach Abschluss der Übungen/Selbststudium):

- Begriffe wie Monotonie, Periodizität, gerade und ungerade Funktion sicher beherrschen und anwenden können,
- den Grenzwertbegriff für Funktionen tiefgreifend verstanden haben und für viele Funktionen bereits Grenzwerte berechnen können,
- den Begriff der Stetigkeit (beide Versionen) und seine mathematischen Konsequenzen tiefgreifend verstanden haben,
- Funktionen anhand von Definition 4.16 auf Stetigkeit untersuchen können,
- einen Überblick über elementare Funktionen gewonnen haben und mit den wichtigsten sicher umgehen können (Schwerpunkte: Polynome, Potenz- und Wurzelfunktionen, Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus, trigonometrische Funktionen).

Sie sind sich nicht sicher oder meinen „nein“? Sie wissen schon. . .