Mathematik II

(für IF, ET, Ph)

Peter Stollmann

Professur Analysis

Sommersemester 2020

Studiengänge: B Angewandte Informatik, B Informatik, M Informatik für Geistes- und Sozialwissenschaftler, B Biomedizinische Technik, B Regenerative Energietechnik, B Elektromobilität, B Elektrotechnik, B Computational Science, B Physik

Mathematik! TU Chemnitz

Inhalt I

Inhalt II

Inhalt III

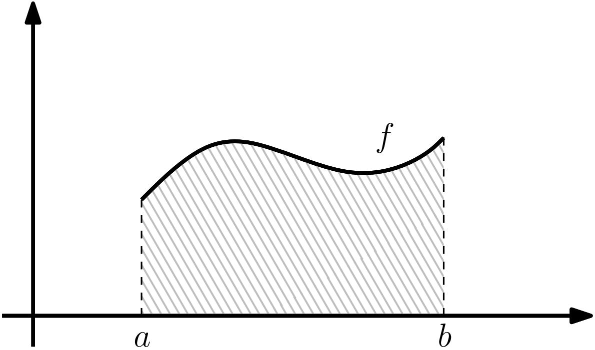
Der Riemannsche Integralbegriff

Die Integralrechnung bildet das Gegenstück zur Differentialrechnung.
Sie wurde parallel zu dieser von Newton und Leibniz entwickelt und später von Cauchy präzise gefasst.

Der hier vorgestellte Integralbegriff geht (zumindest sinngemäß) auf den deutschen Mathematiker Riemann zurück.

Bernhard Riemann (1826–1866)

Gesucht ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer beschränkten Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und der x-Achse:



Im Allgemeinen ist die Fläche krummlinig begrenzt; Formeln für elementare geometrische Objekte scheiden also zur Lösung aus.

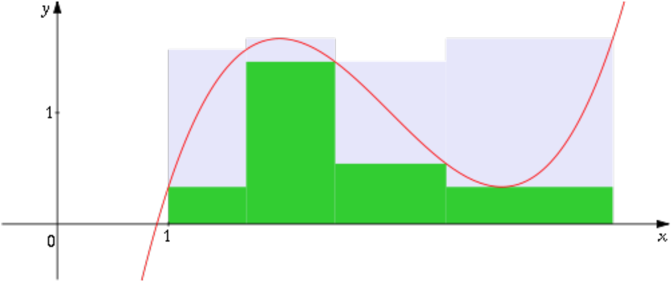
Der Riemannsche Integralbegriff

Lösungsstrategie

Das Problem ist einfach für stückweise konstante Funktionen, da sich dann der Flächeninhalt aus Rechtecken zusammensetzt.

Daher schachtelt man die Fläche unter dem Graphen von f von oben und unten mit Rechteckflächen ein und gewinnt so obere und untere Schranken.

Können sich die grauen und grünen Rechteckflächen von oben und unten beliebig weit derselben Schranke nähern, so ist diese die gesuchte Fläche.



Wir beschreiben diesen Zugang nun mathematisch exakt.

Definition 6.1

Wir nennen $t : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, wenn es eine Zerlegung

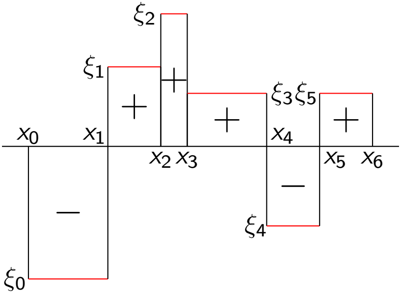
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

des Intervalls $[a, b]$ gibt, so dass t auf jedem der (offenen) Teilintervalle (x_i, x_{i+1}) konstant ist, d. h.

$$t(x) = \xi_i \quad \text{für alle } x \text{ mit} \quad x_i < x < x_{i+1}.$$

Für eine solche Treppenfunktion t setzt man

$$\int_a^b t(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i\,(x_{i+1} - x_i).$$



$\int_a^b t(x)\,\mathrm{d}x$ entspricht dem gewichteten Flächeninhalt zwischen dem Graphen von t und der x-Achse. Dabei werden Flächen oberhalb der x–Achse positiv, Flächen unterhalb der x-Achse negativ gezählt.

Q! Berechnen Sie $\int_{-2}^{1} \operatorname{sgn}(x)\,\mathrm{d}x$ (vgl. S. 106).

Zu jeder beschränkten Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ können wir nun zwei Zahlen definieren, nämlich das Oberintegral

$$\overline{I}_f := \inf \left\{ \int_a^b t(x)\,\mathrm{d}x \,:\, t \text{ Treppenfunktion auf } [a, b] \text{ mit } t \geq f \right\}$$

und das Unterintegral

$$\underline{I}_f := \sup \left\{ \int_a^b t(x)\,\mathrm{d}x \,:\, t \text{ Treppenfunktion auf } [a, b] \text{ mit } t \leq f \right\}.$$

Diese beiden Größen helfen uns, die „Einschachtelung“ der Fläche unter dem Graphen von f mit Rechteckflächen mathematisch zu erfassen.

Definition 6.2 (Riemann-Integral)

Eine auf $[a, b]$ beschränkte Funktion f heißt auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, falls das Ober- und das Unterintegral übereinstimmen, d. h. falls $\overline{I}_f = \underline{I}_f =: I$.

Der gemeinsame Wert wird bestimmtes Riemann-Integral von f über $[a, b]$ genannt und mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

bezeichnet. a heißt untere und b obere Integrationsgrenze, und $[a, b]$ wird Integrationsintervall genannt. x heißt Integrationsvariable und $f(x)$ Integrand.

Konventionen $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0$ und $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (falls $a < b$).

Definition 6.2 liefert zwar kaum Anhaltspunkte für die konkrete Berechnung von Integralen, aber bereits einige Rechenregeln:

Satz 6.3 (Rechenregeln für die Integration I)

Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar, so auch* $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $|f|$, $f \pm g$ *und* fg.

Es gelten die folgenden Integrationsregeln:

$$\int_a^b (f \pm g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \textit{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Q! Machen Sie sich eine der Formeln zumindest für Treppen- funktionen klar. (Die „Vererbung" der Eigenschaften an integrierbare Funktionen soll hier nicht diskutiert werden.)

Satz 6.4 (Rechenregeln für die Integration II)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{für alle } c \in (a, b).$$

Falls $f \leq g$ auf (a, b) gilt, so folgt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Insbesondere folgt aus $c \leq f(x)$ bzw. $f(x) \leq C$ für alle $x \in (a, b)$:

$$c(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{bzw.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq C(b-a).$$

Außerdem gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Q! Interpretieren Sie einige dieser Aussagen geometrisch.

Satz 6.5

*Ist f auf $[a, b]$ **stetig** oder **monoton**, so ist f auch integrierbar auf $[a, b]$.*

Natürlich gehört aber bei weitem nicht jede auf $[a, b]$ integrierbare Funktion in eine dieser beiden Klassen.

Aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen folgt desweiteren:

Satz 6.6 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\,(b-a).$$

Q! Interpretieren Sie diese Aussage geometrisch.

Bislang haben sind wir noch gar nicht darauf eingegangen, wie man denn Integrale konkret berechnet.

Dazu benötigen wir den Begriff der Stammfunktion sowie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Letzterer besagt, dass das Integrieren – unter gewissen Voraussetzungen und sehr grob gesprochen – die „Umkehrung"des Differenzierens ist.

Das Ergebnis ist so berühmt und wichtig, dass es sogar eine Vertonung als Kantate gibt.[2]

[2](F. Wille, 1935-1992). Eine schöne Aufführung von Würzburger Gymnasiasten inclusive animierter Skizzen finden Sie unter `http://www.youtube.com/watch?v=4n6aB4aasyg`.

Definition 6.7

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Man nennt eine differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, wenn

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Beispiel: $F(x) = x^2$ ist Stammfunktion von $f(x) = 2x$, denn $F' = f$.

Q! Können Sie Stammfunktionen zu $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $g(x) = \cos x$ finden? Vielleicht sogar mehrere?

Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f, dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$F_1(x) = F_2(x) + c \qquad \text{für alle } x \in [a, b].$$

(Warum?) Stammfunktionen sind also bis auf Konstanten eindeutig bestimmt.

Stammfunktionen werden auch unbestimmte Integrale genannt und häufig in der Form

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x + c$$

geschrieben. Die Konstante c heißt Integrationskonstante.

Q! Was verstehen wir also unter den unbestimmten Integralen $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ und $\int \cos x\,\mathrm{d}x$?

Zu stetigen Funktionen erhält man eine Stammfunktion wie folgt:

Satz 6.8 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Teil I)

*Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **stetig**, dann ist die durch*

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s$$

definierte Funktion F in $[a, b]$ differenzierbar, und es gilt

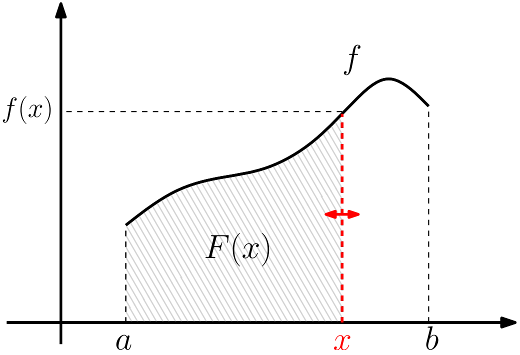
$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s\right) = f(x).$$

Sämtliche Stammfunktionen einer stetigen Funktionen sind konsequenterweise von der Bauart

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s + c. \tag{6.1}$$

Der Riemannsche Integralbegriff

Graphische Darstellung



Dargestellt ist eine stetige Funktion f und ihre Stammfunktion F als Maß der schraffierten Fläche gemäß Satz 6.8.

Q! Erarbeiten Sie sich die Beweisidee anhand der Skizze selbst. Nutzen Sie ggf. auch die Literatur oder die Hauptsatzkantate.

Wegen der Beziehung $F' = f$ liegt für die Bestimmung von Stammfunktionen zunächst das „Rückwärtslesen“ der Tabellen für Ableitungen (S. 185 f.) nahe.

Lernen Sie am besten folgende Stammfunktionen elementarer Funktionen auswendig:

f	F	Bemerkungen
x^n	$x^{n+1}/(n+1)$	$n \neq -1$
$1/x$	$\ln\|x\|$	$x \neq 0$
e^{ax}	e^{ax}/a	$a \neq 0$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$x > 0$
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	

Q! Prüfen Sie die Beispiele auf ihre Richtigkeit.

Aus den Regeln für Ableitungen ergeben sich schließlich folgende Regeln für Stammfunktionen (bis auf Integrationskonstanten):

- $\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x$ ($\lambda \in \mathbb{R}$),
- $\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Es ist anzumerken, dass die Berechnung von Stammfunktionen im Allgemeinen viel schwieriger ist als Differenzieren. Daher gibt es z. T. Hunderte Seiten dicke Integraltafeln.

Deren Bedeutung hat sich allerdings in den letzten Jahrzehnten mit der Verfügbarkeit von PC und numerischen Verfahren deutlich relativiert.

Kommen wir nun zur konkreten Berechnung der Integrale über Stammfunktionen:

Satz 6.9 (HDI, Teil II)

*Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **stetig** und F eine (beliebige) Stammfunktion von f, dann gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Q! Man mache sich klar, warum Satz 6.9 aus (6.1) und Satz 6.8 folgt.

Q! Man berechne $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ mit Hilfe von Satz 6.9.

Q! Man berechne $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{-1}^x t\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$.

Wir nennen eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, wenn sie auf D_f differenzierbar, und die Ableitung f' stetig ist.

Wir wollen hier wenigstens einige elementare Techniken zur Bestimmung von Integralen/Stammfunktionen behandeln. Der folgende Satz entsteht z. B. durch „Integrieren“ der Produktregel:

Satz 6.10 (Partielle Integration)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gelten:

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.2}$$

und

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.3}$$

Integrationstechniken

Beispiel:

$$\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x-1)\,\mathrm{e}^x + c.$$

Hierbei wurde in (6.2) $f'(x) = \mathrm{e}^x$ und $g(x) = x$ gewählt, d. h. $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $g'(x) = 1$.

Das Beispiel ist typisch: Bei Produkten von Polynomen mit trigonometrischen Funktionen (sin, cos, exp) ist die partielle Integration Mittel der Wahl.

Q! Man berechne folgende Integrale mittels partieller Integration:

- $\int_0^\pi x \sin x \,\mathrm{d}x$,
- $\int \ln x \,\mathrm{d}x$,
- $\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$.

Durch „Integrieren“ der Kettenregel entsteht folgender Satz:

Satz 6.11 (Substitutionsregel)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [a, b] \to I$ stetig differenzierbar. Dann gelten:

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\;\mathrm{d}t = \int f(x)\;\mathrm{d}x \tag{6.4}$$

und

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\;\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\;\mathrm{d}x. \tag{6.5}$$

Die Formeln (6.4) und (6.5) merken sich besonders gut in Leibniz-Notation, wenn man $x = \varphi(t)$ und $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\;\mathrm{d}t$ setzt.

Substituiert man in

$$\int_1^2 \frac{\cos(\ln(t))}{t}\,\mathrm{d}t$$

$x = \varphi(t) = \ln t$, so gilt $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$ und daher mit (6.5):

$$\int_1^2 \frac{\cos(\ln t)}{t}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} \cos x\ \mathrm{d}x = \sin x\,\Big|_0^{\ln 2} = \sin(\ln 2) \approx 0.639.$$

In Leibniz-Notation würde man $x = \ln t$ schreiben und $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}$ in $\mathrm{d}t = t\,\mathrm{d}x$ „umformen“. Einsetzen ins Integral liefert dann ebenso

$$\int_1^2 \frac{\cos(\ln t)}{t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\ln 2} \frac{\cos x}{\cancel{t}}\,\cancel{t}\,\mathrm{d}x = \ldots = \sin(\ln 2).$$

Entscheidend ist das Erkennen der Struktur $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Haben Sie diese Struktur einmal erfasst, führt die Substitution auch zum Ziel.

Zusätzliche Konstanten im Integranden sind wegen der Linearität des Integrals unproblematisch.

Besonders einfach sind Integranden der Form $f(at+b)$. Kennt man eine Stammfunktion von f, führt die Substitution $x = at+b$ zum Ziel.

Q! Berechnen Sie $\int t\,\mathrm{e}^{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ und $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3t+1}}\,\mathrm{d}t$.

Q! Welche Substitutionen sind in folgenden Integralen zweckmäßig:

$$\int \sin(2t-5)\,\mathrm{d}t, \quad \int \frac{t}{17}\cos(t^2+4)\,\mathrm{d}t, \quad \int \frac{\mathrm{e}^{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \quad \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+2}?$$

Für eine invertierbare Funktion φ liefert (6.5) desweiteren

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Auch dies lässt sich geschickt nutzen. Mit $x = \varphi(t) = \sin t$ erhält man für $-1 \leq a < b \leq 1$ zum Beispiel

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\arcsin a}^{\arcsin b} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\arcsin a}^{\arcsin b} \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Das letztere Integral hatten wir bereits auf S. 254 ausgewertet. Es ergibt sich

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)\Big|_{\arcsin a}^{\arcsin b}.$$

- Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $r \in \mathbb{R}$ $(r \neq -1)$ und f^r auf $[a, b]$ definiert. Dann gilt

$$\int f'(x)(f(x))^r \,\mathrm{d}x = \frac{1}{r+1}(f(x))^{r+1} + c.$$

- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln(|f(x)|) + c.$$

Q! Machen Sie sich die beiden Aussagen mit Hilfe geeigneter Substitutionen klar.

Q! Berechnen Sie $\int \sin^3(x) \cos(x) \,\mathrm{d}x$ und $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$.

Erinnerung: Rationale Funktionen sind von der Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

wobei p und q Polynome sind. Falls $\mathrm{grad}(p) \geq \mathrm{grad}(q)$ erhält man mittels Polynomdivision eine Zerlegung

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{t(x)}{q(x)},$$

mit Polynomen s und t, wobei $\mathrm{grad}(t) < \mathrm{grad}(q)$.

Somit gilt

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \int s(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{t(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Die Integration von s ist einfach, daher konzentrieren wir uns auf den „echt“ gebrochen rationalen Anteil $\frac{t}{q}$.

Für die Integration des echt gebrochen rationalen Anteils benötigt man eine sogenannte Partialbruchzerlegung.

Dafür beschafft man sich zunächst die Faktorisierung des Nennerpolynoms

$$\begin{aligned} q(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \\ &= a_n \prod_{j=1}^{k} (x-\lambda_j)^{\mu_j} \prod_{j=1}^{m} \left(x^2 + p_j x + q_j\right)^{\nu_j}, \end{aligned} \tag{6.6}$$

(wobei $n = \mathrm{grad}(q)$ und $\sum_{j=1}^{k} \mu_j + 2\sum_{j=1}^{m} \nu_j = n$, λ_j und (p_j, q_j) paarweise verschieden, vgl. Satz 1.29 und S. 133).

Für die Integration noch günstiger schreibt man (6.6) mittels quadratischer Ergänzung als:

$$q(x) = a_n \prod_{j=1}^{k} (x-\lambda_j)^{\mu_j} \prod_{j=1}^{m} \left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j\right)^{\nu_j}$$

Der folgende Satz hilft uns nun, $g(x) := \frac{t(x)}{q(x)}$ in eine für die Integration geeignete Struktur zu bringen:

Satz 6.12

Unter diesen Voraussetzungen und mit diesen Bezeichnungen gibt es eindeutig bestimmte reelle Zahlen

$$\begin{aligned} &\eta_{j,\ell} \qquad (j = 1, 2, \dots, k,\ \ell = 1, 2, \dots, \mu_j) \\ &\sigma_{j,\ell} \qquad (j = 1, 2, \dots, m,\ \ell = 1, 2, \dots, \nu_j) \\ &\tau_{j,\ell} \qquad (j = 1, 2, \dots, m,\ \ell = 1, 2, \dots, \nu_j), \end{aligned}$$

so dass g die folgende Partialbruchzerlegung besitzt:

$$g(x) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{\mu_j} \frac{\eta_{j,\ell}}{(x-\lambda_j)^\ell} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{\nu_j} \frac{\sigma_{j,\ell} + \tau_{j,\ell} x}{((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2)^\ell}. \tag{6.7}$$

Möglicherweise finden Sie folgende Darstellung von (6.7) übersichtlicher:

$$
\begin{aligned}
g(x) \quad = \quad & \frac{\eta_{1,1}}{x-\lambda_1} + \frac{\eta_{1,2}}{(x-\lambda_1)^2} + \ldots + \frac{\eta_{1,\mu_1}}{(x-\lambda_1)^{\mu_1}} \\
& + \ldots \\
& + \frac{\eta_{k,1}}{x-\lambda_k} + \frac{\eta_{k,2}}{(x-\lambda_k)^2} + \ldots + \frac{\eta_{k,\mu_k}}{(x-\lambda_k)^{\mu_k}} \\
& + \frac{\sigma_{1,1}+\tau_{1,1}x}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \frac{\sigma_{1,2}+\tau_{1,2}x}{((x-\alpha_1)^2+\beta_1^2)^2} + \ldots + \frac{\sigma_{1,\nu_1}+\tau_{1,\nu_1}x}{((x-\alpha_1)^2+\beta_1^2)^{\nu_1}} \\
& + \ldots \\
& + \frac{\sigma_{\ell,1}+\tau_{\ell,1}x}{(x-\alpha_\ell)^2+\beta_\ell^2} + \frac{\sigma_{\ell,2}+\tau_{\ell,2}x}{((x-\alpha_\ell)^2+\beta_\ell^2)^2} + \ldots + \frac{\sigma_{\ell,\nu_\ell}+\tau_{\ell,\nu_\ell}x}{((x-\alpha_\ell)^2+\beta_\ell^2)^{\nu_\ell}}
\end{aligned}
$$

Im konkreten Beispiel kann man auf die Doppelindizierung verzichten und für die Unbekannten $\eta_{j,t}, \sigma_{j,s}$ und $\tau_{j,s}$ eingängigere Bezeichnungen (z. B. $A, B, C, \ldots$) wählen.

Bei der Konstruktion einer Partialbruchzerlegung wählt man also den passenden Ansatz nach Satz 6.12 und muss dann die Koeffizienten $\eta_{j,t}$, $\sigma_{j,s}$ und $\tau_{j,s}$ bestimmen.

Dafür multipliziert man beide Seiten von (6.7) mit $q(x)$ und gleicht dann die Koeffizienten der links und rechts stehenden Polynome ab.

Eine noch günstigere Variante ist häufig, nach Multiplikation mit $q(x)$ genau n verschiedene Werte für x einzusetzen und das entstehende lineare Gleichungssystem zu lösen.

Eine besonders günstige Wahl für die einzusetzenden Werte sind dabei die Nullstellen λ_j von q.

Am leichtesten erlernt man die Partialbruchzerlegung anhand von Beispielen:

Q! Man bestimme eine Partialbruchzerlegung von

$$f(x) = \frac{5x^2 - 37x + 54}{x^3 - 6x^2 + 9x}.$$

Q! Welche Ansätze sind für die Partialbruchzerlegungen folgender Funktionen zu wählen?

$$g(x) = \frac{42}{x^3(x+1)^2}, \quad h(x) = \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}.$$

Die Funktionen aus (6.7) besitzen folgende Stammfunktionen:

$f(x)$	$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$	
$\frac{1}{x-\lambda}$	$\ln(\lvert x-\lambda\rvert)$	$\lambda \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{(x-\lambda)^k}$	$-\frac{1}{k-1}\,\frac{1}{(x-\lambda)^{k-1}}$	$k \in \mathbb{N}, k > 1$
$\frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{1}{\beta}\,\arctan\frac{x-\alpha}{\beta}$	$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$
$\frac{x}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + \frac{\alpha}{\beta}\,\arctan\frac{x-\alpha}{\beta}$	

Die verbleibenden Integrale müssen rekursiv berechnet werden:

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k} = \frac{-1}{2(k-1)\,((x-\alpha)^2+\beta^2)^{k-1}} + \alpha \int \frac{\mathrm{d}x}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k},$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k} = \frac{x-\alpha}{2(k-1)\beta^2\,((x-\alpha)^2+\beta^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)\beta^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{k-1}}$$

für $k \in \mathbb{N},\ k > 1$.

Wir fassen die Schritte zur Integration einer rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ noch einmal zusammen:

- Spalte mittels Polynomdivision den echt gebrochen rationalen Anteil ab:
$$f(x) = s(x) + \frac{t(x)}{q(x)} \quad \text{mit } \operatorname{grad}(t) < \operatorname{grad}(q)$$
- Berechne für $g(x) = \frac{t(x)}{q(x)}$ eine Partialbruchzerlegung und integriere die entstehenden Summanden mit Hilfe der Formeln und Tabellen auf Seite 266. Das verbleibende Integral über $s(x)$ ist einfach.

Q! Man bestimme auf diese Weise
$$\int_a^b \frac{2x^4 - 12x^3 + 23x^2 - 37x + 54}{x^3 - 6x^2 + 9x}\,\mathrm{d}x.$$

Uneigentliche Integrale

Bisher können wir nur beschränkte Funktionen und beschränkte Intervalle behandeln. Wir erweitern den Integralbegriff daher ein wenig.

Definition 6.13 (Uneigentliches Integral)

Sei $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a, r]$ mit $a < r < b$, Riemann-integrierbar. Falls

$$\lim_{r \to b-} \int_a^r f(x)\,\mathrm{d}x =: \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

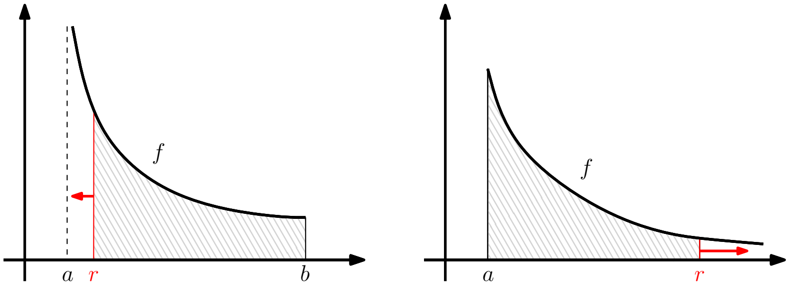
existiert, so heißt f auf $[a, b)$ uneigentlich Riemann-integrierbar.
Man sagt auch, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist konvergent.

Analog für $f(a, b] \to \mathbb{R}$ oder $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Uneigentliche Integrale

Von besonderem Interesse sind häufig folgende Fälle:

- der Integrand ist bei Annäherung an eine der Integrationsgrenzen unbeschränkt (links),
- das Integrationsintervall ist unbeschränkt (rechts).



Q! Bestimmen Sie $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ sowie $\int\limits_0^{42} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$.

- Für $r > 1$ und $a > 0$ gilt

$$\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^r} = \frac{1}{(r-1)\,a^{r-1}}.$$

Dagegen existiert $\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^r}$ für $r \leq 1$ nicht.

- In der Stochastik benötigt man häufig

$$\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

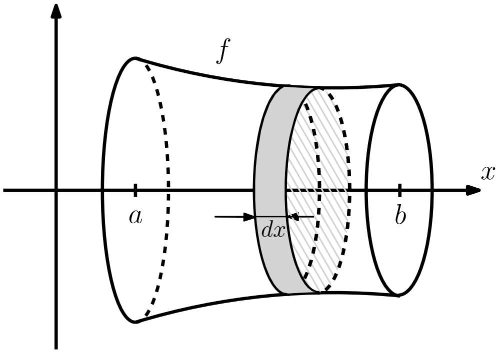
Q! Zu welchem Ergebnis aus dem Kapitel Reihen erkennen Sie im ersten Beispiel Parallelen?

Volumenberechnung bei Rotationskörpern

Für die Berechnung krummflächig berandeter Körper benötigt man eigentlich mehrdimensionale Integrale.

Bei Körpern, die durch Rotation eines Funktionsgraphen um die x-Achse entstehen, reichen jedoch eindimensionale Integrale aus.

Man nennt solche Körper Rotationskörper.



Volumenberechnung bei Rotationskörpern

„Herleitung“ der Volumenformel in Leibniz-Notation

Die Größe $\mathrm{d}x$ wird als „infinitesimal“ kleine Zahl interpretiert; das Integral als Summe (beachte stilistische Ähnlichkeit von „$\int$“ und „S“).

Für das Volumen der grau markierte Scheibe gilt für sehr kleine $\mathrm{d}x$

$$V_{\mathrm{Scheibe}} \approx \pi[f(x)]^2 \,\mathrm{d}x.$$

Damit ergibt sich für das Volumen V_K des Rotationskörpers

$$V_K = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x$$

(Natürlich steckt hinter dieser „Herleitung“ eigentlich wieder ein Grenzwertprozess.)

Q! Welches Volumen hat der Körper, der durch Rotation des Graphen von $f : [1, r] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$, um die x-Achse entsteht?

Quadraturformeln

Nur die wenigsten Integrale kann man geschlossen auswerten; in den allermeisten Fällen ist man auf numerische Näherungsverfahren – sogenannte Quadraturverfahren – angewiesen.

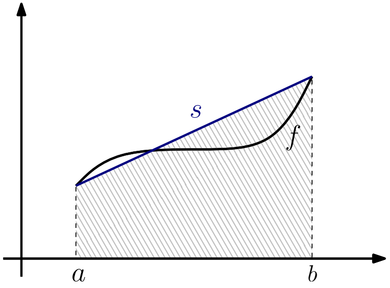
Prominente Integrale, die sich nachweislich nicht durch elementare Stammfunktionen bestimmen lassen, sind zum Beispiel

$$\Phi(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-s^2} \, \mathrm{d}s \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Die entstehende Funktion $x \mapsto \Phi(x)$ heißt Fehlerfunktion.

Quadraturformeln

Als Vorbetrachtung ersetzen wir eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ näherungsweise durch ihre Sekante s durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$.



Damit erhalten wir die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)). \tag{6.8}$$

Schon anschaulich wird klar, dass diese Formel im Allgemeinen nur sehr grobe Näherungen liefern kann.

Wesentlich bessere Ergebnisse erhält man aber, wenn man $[a, b]$ in N gleichlange Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ unterteilt mit

$$x_i = a + ih \quad (i = 0, 1, \ldots, N) \ \text{ mit } h = (b-a)/N.$$

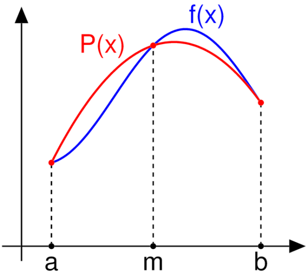
und die einfache Trapezregel (6.8) über jedem Teilintervall anwendet:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2}\, h\,(f(x_i) + f(x_{i+1})) \qquad (6.9) \\ &= h\left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{N-1}) + \frac{1}{2} f(x_N)\right]. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen den Ausdruck auf der rechten Seite als Trapezsumme $T_f(h)$ und die Formel (6.9) als zusammengesetzte Trapezregel.

Quadraturformeln

Alternativ kann man f lokal auch durch quadratische Polynome ersetzen, und dadurch eine noch bessere Approximation erreichen:



Dieser Ansatz führt letztlich auf die zusammengesetzte Simpsonregel:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\ldots+4f(x_{N-1})+f(x_N)\right].$$

Dabei ist N gerade zu wählen. Den Term auf der rechten Seite bezeichnen wir mit $S_f(h)$.

Quadraturformeln

Natürlich will man wissen, wie groß der resultierende Fehler bei Verwendung einer Quadraturformel ist. Dabei hilft uns:

Satz 6.14 (Quadraturfehler Trapez- und Simpsonregel)

Ist f auf $[a,b]$ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T_f(h) \right| \le \frac{b-a}{12}\ h^2 \max_{a\le x\le b} |f''(x)|.$$

Ist f auf $[a,b]$ viermal stetig differenzierbar, dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_f(h) \right| \le \frac{b-a}{180}\ h^4 \max_{a\le x\le b} |f^{(4)}(x)|.$$

Q! Welche der beiden Regeln ist für genügend kleine h genauer? Approximieren Sie ein bekanntes Integral Ihrer Wahl mit beiden Quadraturformeln für mehrere geeignete Werte von h.

Ziele erreicht?

Sie sollten nun (bzw. nach Abschluss der Übungen/Selbststudium):

- den Begriff des Riemann-Integrierbarkeit tiefgreifend verstanden haben,
- den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung beherrschen und Integrale mit Hilfe der Stammfunktion berechnen können,
- die Stammfunktionen zu den gängigen elementaren Funktionen kennen (am besten auswendig),
- einige Integrationstechniken sicher anwenden können (part. Integration, Substitution, einfache Fälle der Partialbruchzerlegung),
- uneigentliche Integrale und das Volumen von Rotationskörpern sicher berechnen können,
- über Quadraturformeln grob bescheidwissen.

Sie sind sich nicht sicher oder meinen „nein“? Naja, ...