

Der Koordinaterring

Idee: $P \in \overbrace{K[x_1, \dots, x_n]}^{R_n} \rightsquigarrow$ eindeutig
falls $|K| = \infty$

Funktion $P: A_K^n \rightarrow K$
 $a \mapsto P(a)$

§ 19

Definition: Sei $X \subset A_K^n$ eine algebraische Menge, dann heißt der Quotient

$$K[X] := \mathcal{O}_X(X) := R_n / I(X)$$

der Koordinaterring von X .

klar: - $K[X]$ ist endlich erzeugte K -algebra
erzeugt von Klassen von $x_1, \dots, x_n$

- $K[x]$ ist **reduziert**, d. h.,

es gibt keine nilpotenten Elemente
(außer 0) in $K[x]$ (wobei:

R Ring, $f \in R$ heißt nilpotent

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: f^n = 0$), dann

$$I(x) = \sqrt{I(x)}$$

Lemma 3.20: Jeder $[f] \in K[x]$

heißt eine Funktion

$$f: X \rightarrow K$$

$$x \mapsto f(x)$$

dies ist wohldefiniert, denn f kann

modulo $I(X)$ gewählt werden, aber
 $\forall g \in I(X): g(x) = 0 \quad \forall x \in X$.

Bsp: $X = V(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}_K^2$

$\Rightarrow x^2$ und $1 - y^2$ (Elemente aus $K[x, y]$)

liefern die gleiche Funktion auf X ,

denn sie definieren die gleiche

Klasse in $K[x, y] / (x^2 + y^2 - 1)$

Beim: $K[\mathbb{A}_K^n] = R_n$

2.) Verallgemeinerung des NS-Satzes!

Sei $X \subset \mathbb{A}_K^n$ affin-alg. Menge

$$\{Y \subset X \mid Y \text{ affin.-alg. Menge}\}$$



$$\{\text{Radikalideale } \mathcal{I} \subset K[X]\}$$

$$\text{falls } K = \overline{K}$$

3.) affin.-alg. Menge X ist

Varietät, d. h. irreduzibel $\Leftrightarrow$

$\mathcal{I}(X) \subset K_n$ ist Primideal

$$\Leftrightarrow K[X] = R_n / I(x) \text{ ist}$$

Integritätsring

Def. 3.21. Sei R ein Ring.

1.) Die Krulldimension von R ist

$$\dim^{\text{Kull}}(R) := \sup \{ n \mid \exists \text{ Primideale}$$

$$p_1, \dots, p_n :$$

$$(0) \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_n \}$$

Beim: Primideale sind immer echte

Ideale, d.h. $p_n \subsetneq R$ gilt automatisch

2.) Sei $p \in R$ ein Primideal,
dann ist die Höhe von p ,
geschrieben $\text{ht}(p)$ das Supremum
über alle n mit:

$\exists$ Kette;

$$(0) \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_n = p$$

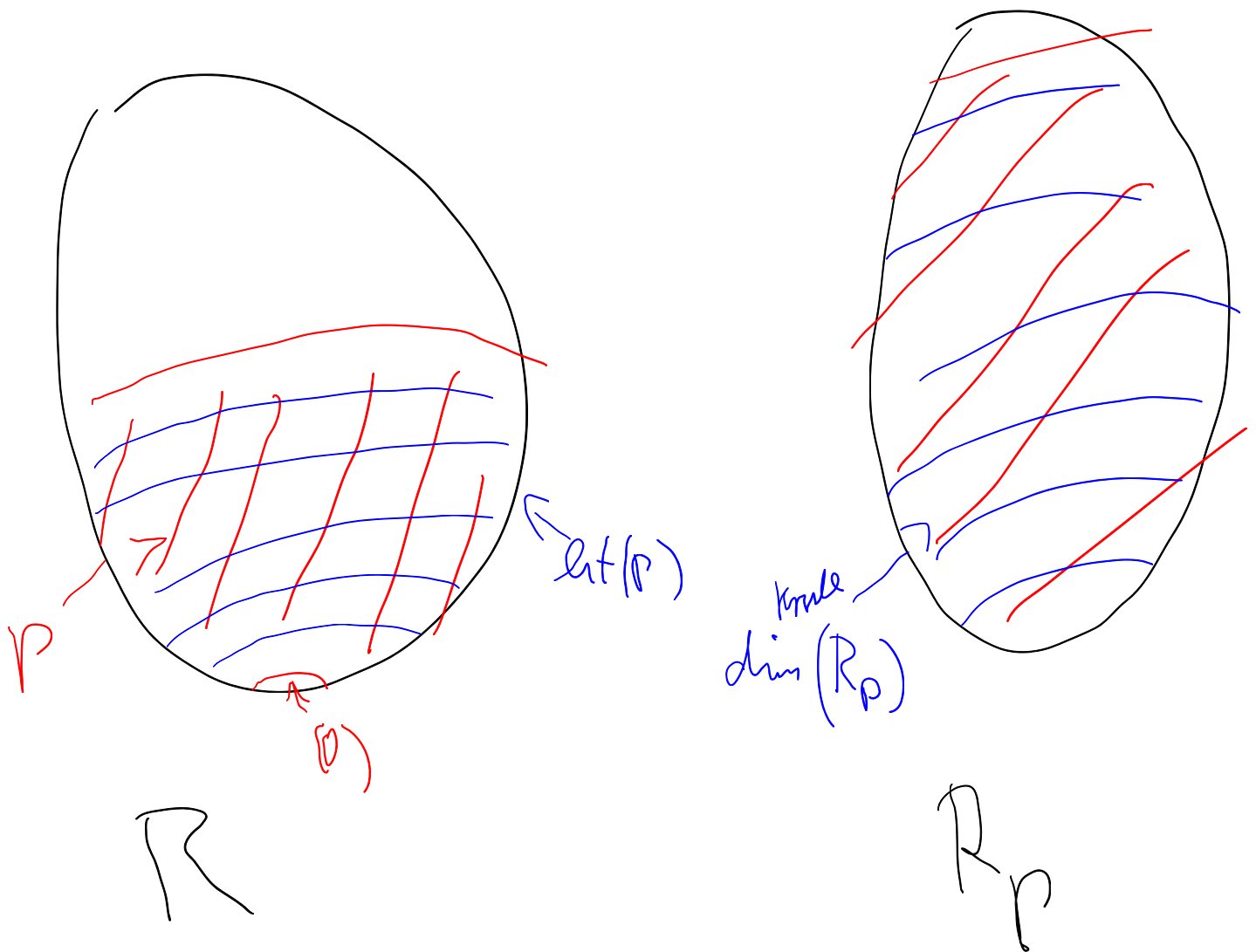
Übung: $\text{ht}(p) = \dim^{\text{Kru}}(R_p)$

Erinnerung: $R_p := S^{-1}R$ mit

$S := R \setminus p$, $S^{-1}R$: Lokalisierung
von R am multiplikativen System S

$$S^{-1}R := \{(a,b) \mid a \in R, b \in S\} / \sim$$

Anschaulich:



Lemma 3.27: Sei $K = \bar{K}$, $X \subset \mathbb{A}_K^n$ eine
affin - alg - Menge, dann
$$\dim(X) = \dim^{Knull} K[X]$$

Beweis: mit NSS. (wie in
Bemerkung 3.20)

Insbesondere: $\dim(A_K^n) = \dim^{\text{Kru}} R_n$

(schon gesehen: $\geq n$, später $= n$)

Lemma 3.23: 1.) K Körper

$$\Rightarrow \dim^{\text{Kru}}(K) = 0$$

2.) Sei R ein Hauptidealring,

$$(\text{z.B. } R = R_1 = K[x])$$

$$\Rightarrow \dim^{\text{Kru}}(R) \leq 1$$

Bew: 1.) K Körper, $I \neq K$ ideal

$$\Rightarrow I = (0), \text{ also } \dim^{\text{Kru}}(K) = 0$$

2.) Sei $\overset{(0)}{c} p \neq q \subset R$ Kette von

$$\text{Primidealen} \Rightarrow q = (f), p = (g)$$

$f, g \in R, f \neq 0$. f ist Primelement,
 g ist Primelement oder Null.

1. Fall: $g \neq 0$: $p < q \Rightarrow g = \overset{R}{a} \cdot f$

$$g \mid a \cdot f \Rightarrow g \mid a \text{ oder } g \mid f$$

$a = g \cdot b$

$$g = a \cdot f = g \cdot b \cdot f \xrightarrow[\text{mit } g]{R \text{ int.}} b \cdot f = 1 \Rightarrow f \in R^\times$$

$$g|_f \Rightarrow f = g. \text{ b}$$

$$\Rightarrow q < p \text{ also } q = p \quad \text{b} \quad p \neq q$$

Also folgt aus $(0) \subset (p) \subsetneq q \subset R$

notwendig, daß $(p) = (0)$ ist,

$$\text{also ist } \dim^{\text{Krull}}(R) \leq 1$$

gegeben: $X \subset \mathbb{A}_K^n$ alg. Menge
 $= \overline{O_X(X)}$

$\leadsto K[X]$ Menge der algebraischen

(d.h. polynomiellen) Funktionen auf X

Ziel: Erweitere dies für offene

Teilmenge $U \subset X$, d.h., definiert

Ring von Funktionen $\mathcal{O}_X(U)$ auf U ,

so, daß $\mathcal{O}_X(X) = K[X]$ ist.

Def. 3.24. Sei $X \subset \mathbb{A}_K^n$ eine affin-alg.

Varietät (d.h. X irreduzibel $\Rightarrow$

$K[X]$ Integritätsring $\Rightarrow (0) \subset K[X]$ Primideal
al)

1.) Setze $K(X) := Q(K[X])$

(der Quotientenring von $K[X]$,

bzw. $K(X) = \{ (f, g) \mid f, g \in K[X], g \neq 0 \} / \sim$

mit $(f, g) \sim (f', g') \Leftrightarrow f \cdot g' = g \cdot f'$

$K(X)$ heißt Körper der rationalen Funktionen auf X , schreibe

$$\frac{f}{g} \in K(X)$$

2.) $\forall x \in X$, setze

$$\mathcal{O}_{X,x} := \left\{ \frac{f}{g} \in K(X) \mid g(x) \neq 0 \right\} \subset K(X)$$

3.) Für eine offene Menge $U \subset X$

setze

$$\mathcal{O}_X(U) := \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x} \subset K(X)$$

Bemerkungen 3.25: 1.) schon gesehen

$$f \in K[X] \longmapsto (\text{polynom.}) \text{ Funktion} \\ f: X \rightarrow K$$

analog:

$$f/g \in K(X) \longmapsto \text{rationale Funktion} \\ \text{"auf } X \text{" i.d. h.}$$

polynomiale Funktionen
auf $X \setminus V(g)$

2.) Falls $U \subset X$ offen ist, muss
nicht jedes $F \in \mathcal{O}_X(U)$ als Quotient
 f/g mit $f, g \in K[X]$ gegeben sein

Bsp: Sei $X = V(x_1 x_4 - x_2 x_3) \subset \mathbb{A}_k^4$

$$U_1 = X \setminus V(x_1), \quad U_2 = X \setminus V(x_2)$$

$$U = U_1 \cup U_2$$

$$\leadsto \text{ auf } U_2 \text{ gilt: } x_3 = \frac{x_1 \cdot x_4}{x_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_3}{x_1} = \frac{x_4}{x_2}$$

$$\leadsto \frac{x_3}{x_1} \in \mathcal{O}_X(U_2)$$

$$\text{analog } \frac{x_4}{x_2} \in \mathcal{O}_X(U_1)$$

und
$$\left(\frac{x_3}{x_1} \right) |_{\mu_1 \cap \mu_2} = \left(\frac{x_4}{x_2} \right) |_{\mu_1 \cap \mu_2}$$

$\Rightarrow$ dies heißt ein Element $\phi \in$

$\mathcal{O}_X(\mu)$. Aber: $\exists f, g \in K[X]$

mit $\phi = \left(\frac{f}{g} \right) |_{\mu}$.

Erinnerung: Lokale Ringe

Def.-Lemma 3.26.: 1.) Sei R ein

Ring, dann heißt R **lokal** $\Leftrightarrow$

$\exists!$ maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset R$.

Man schreibt auch $(R, \mathfrak{m})$.

2.) R ist lokaler Ring

$\Leftrightarrow R \setminus R^\times$ ist ein Ideal

(und dann ist $m := R \setminus R^\times$ genau
das eindeutige maximale Ideal
von (R, m))

3.) Sei R ein Ring, $m \subset R$ Ideal,
dann ist R lokal und max.

Ideal $m \Leftrightarrow R \setminus m = R^\times$

4.) Wenn (R, m) lokal ist

$\Rightarrow \forall x \in m: 1+x \in R^\times$

5.) (R, m) lokal, dann heißt

$\kappa(R) := R/m$ der Restklassen-
körper von R bei m .

6.) (R, m) lokal, $I \subset R$ Ideal

$\Rightarrow R/I$ ist auch lokal.

7.) Seien $(R, m_R), (S, m_S)$ lokal,

sei $\varphi: R \rightarrow S$ Ringhomomorphismus,

dann heißt φ lokal $\Leftrightarrow$

$$\varphi(m_R) \subset m_S$$

Def. - Lemma 3.27:

$X \subset \mathbb{A}_k^n$ affin-alg. Varietät
($k = \bar{k}$)

1.) $\forall x \in X \Rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ ist lokal

(mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_{X,x}$),

wir nennen $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_{X,x}$ den

Restklassenkörper von X bei x

2.) Sei $f \in K[X]$, angenommen

$(f) = \overline{\mathcal{V}(f)}$, sei $X_f := X \setminus \mathcal{V}(f)$

$=: D_X(f)$ eine ausgezeichnete

offene Menge, dann gilt:

$$\mathcal{O}_X(X_f) \stackrel{!}{=} K[x]_f := \left\{ \frac{g}{f^k} \mid g \in K[x], k \geq 0 \right\}$$

Lokalisierung an multiplikativem
System $\{1, f, f^2, f^3, \dots\}$

Beweis: 1.) Setze:

$$m_{X,f} := \left\{ \frac{f}{g} \in \mathcal{O}_{X,f} \mid f(x) = 0 \right\}$$

$\{ \frac{f}{g} \in K(x) \mid g(x) \neq 0 \}$

Dann gilt für alle $\frac{f}{g} \in \mathcal{O}_{X,x} \setminus \mathfrak{m}_{X,x}$:

$$\frac{g}{f} \in \mathcal{O}_{X,x}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \neq 0$$

$$\text{Also: } \mathcal{O}_{X,x} \setminus \mathfrak{m}_{X,x} = (\mathcal{O}_{X,x})^\times$$

also ist $\mathcal{O}_{X,x}$ ein lokaler Ring,

und $\mathfrak{m}_{X,x} \subset \mathcal{O}_{X,x}$ ist maximales

Ideal.

$$2.) \text{ z.z. } \mathcal{O}_X(x_f) = K[X]_f$$

" $\supset$ ": $\forall \frac{g}{f^k}$: $\frac{g}{f^k}$ ist auf $X \setminus V(f)$ wohldefiniert

$$\underline{\text{z.z.}}: \mathcal{O}_X(X_f) \subset K[\bar{x}]_f \quad \begin{matrix} K(x) \\ \subset \end{matrix}$$

$$\text{Sei } \phi \in \mathcal{O}_X(X_f) = \bigcap_{x \in X_f} \mathcal{O}_{x, X} = \bigcap_{x \notin V(p)} \mathcal{O}_{x, X}$$

$$\text{Sei } \mathcal{J} := \left\{ \tilde{h} \in K[\bar{x}] \mid \tilde{h} \cdot \phi \in K[x] \right\}$$

$$\text{klar: } \mathcal{J} \subset K[\bar{x}] \text{ Ideal}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{z.z.}}: \exists k: f^k \in \mathcal{J} & \quad (\Leftrightarrow f^k \cdot \phi \in K[x]) \\ & \quad (\Rightarrow f^k \cdot \phi = g^q) \\ & \quad (\Leftrightarrow \phi = g/f^2) \\ & \quad (\Rightarrow \phi \in K[\bar{x}]_f) \end{aligned}$$

$$\phi \in \bigcap_{x \notin V(P)} \mathcal{O}_{x,+}$$

$$\text{Seq: } x \notin V(P) \Rightarrow \exists g_1^{(x)}, g_2^{(x)} : g_2^{(x)}(x) \neq 0$$

$$\phi = \frac{g_1^{(x)}}{g_2^{(x)}} \Rightarrow g_2^{(x)} \in \mathcal{I} \quad \forall x \notin V(P)$$

$$\Rightarrow \underline{x \notin V(\mathcal{I})} \quad \forall x \in X \setminus V(P)$$

$$\Rightarrow \underline{V(\mathcal{I}) \subset V(P) \subset X}$$

$$\mathcal{I}(V(P)) \subset \mathcal{I}(V(\mathcal{I}))$$

$\parallel$

$$(P) \hookrightarrow f \in \mathcal{I}(V(\mathcal{I}))$$

$$\Rightarrow f^k \in \mathcal{I}$$

$\square$