

Kapitel 4: Projektive Varietäten

Der projektive Raum:

Def. 4.1.: Sei K Körper, V ein endlich-dim. K -VR, $\dim(V) = n+1$. Setzen

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V) &:= \{ \text{Geraden durch } 0 \in V \} \\ &= (V \setminus \{0\}) / \sim \end{aligned}$$

mit $a \sim b \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^* : a = \lambda \cdot b$

$\mathbb{P}(V)$ heißt die Projektivierung von V .

Schreibe $\mathbb{P}_K^n$ für $\mathbb{P}(K^{n+1})$, dies

heißt der n -dimensionale projektive

Raum über K . Man hat die
kanonische Projektion:

$$\mathcal{P}: V \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{P}(V)$$

$$v \longmapsto [v]$$

Für $V = K^n$, dann ist ein Punkt

$x = [v] \in \mathcal{P}_K^n$ gegeben durch den Vektor

$v = (x_0, \dots, x_n) \in K^n \setminus \{0\}$, bis auf Multi-

plikation mit $\lambda \in K^\times$. Man schreibt

$x = (x_0 : \dots : x_n)$ und das n -tupel

$(x_0 : \dots : x_n)$ heißt die **homogenen**

Koordinaten des Punktes $x \in \mathcal{P}_K^n$

Beachte: Der Punkt $(0:\dots:0)$ gilt
es nicht in P_K^n .

Bem: 1.) Für $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ sei

$$U_i := \left\{ (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in P_K^n \mid x_i \neq 0 \right\} \subset P_K^n$$

Dann gilt es Bijektionen: $\hookrightarrow P_K^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$

$$\phi_i : A_K^n \longrightarrow U_i$$

$$(y_1, \dots, y_n) \longmapsto (y_1 : y_2 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n)$$

mit Umkehrung:

$$\psi_i : U_i \longrightarrow A_K^n$$

$$(x_0 : \dots : x_n) \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

mit Übergangsabbildungen:

$$\phi_{ij} = \psi_j \circ \phi_i: [A_K^n \setminus \{y_j = 0\}] = \psi_i(u_i \cap u_j) \rightarrow$$

$$\psi_j(u_i \cap u_j) = A_K^n \setminus \{y_i = 0\}$$

i -te Stelle

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \psi_j \left(y_1 : \dots : y_{i-1} : \overset{\uparrow}{1} : y_i : \dots : y_n \right)$$

$$\stackrel{y_j \neq 0}{=} \psi_j \left(\left(\frac{y_1}{y_j} : \frac{y_2}{y_j} : \dots : \frac{y_{i-1}}{y_j} : \frac{1}{y_j} : \frac{y_i}{y_j} : \dots : \frac{y_{j-1}}{y_j} : 1 : \frac{y_{j+1}}{y_j} : \dots : \frac{y_n}{y_j} \right) \right)$$

$$= \left(\frac{y_1}{y_j} : \dots : \frac{y_{i-1}}{y_j} : \frac{1}{y_j} : \frac{y_i}{y_j} : \dots : \frac{y_{j-1}}{y_j} : \frac{y_{j+1}}{y_j} : \dots : \frac{y_n}{y_j} \right)$$

2.) Das Komplement von $U_i \subset \mathbb{P}_K^n$ ist

$$\mathbb{P}_K^n \setminus U_i = \left\{ (a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}_K^n \mid a_i = 0 \right\}$$

$$\cong \mathbb{P}_{K_1}^{n-1}$$

$\leadsto$ Zerlegung (für jedes $i = 0, \dots, n$):

$$\mathbb{P}_K^n = A_K^n \cup \mathbb{P}_K^{n-1}$$

3.) Insbesondere: $\mathbb{P}_K^1 = A_K^1 \cup \mathbb{P}_K^0$

$$K \setminus \{0\} / \sim = \{pt\}$$

$$= A_K^1 \cup \{\infty\}$$

Topologie auf $\mathbb{P}_K^n$: $U \subset \mathbb{P}_K^n$ ist offen

$\Leftrightarrow$ $\forall i \in \{0, \dots, n\}$: $U \cap U_i$ offen in U_i .

$U_i \simeq \mathbb{A}_K^n$. Prüfe: dies liefert

Topologie auf $\mathbb{P}_K^n$ (benutze:

$U_i \cap U_j \simeq \mathbb{A}_K^n \setminus V(x_j)$ ist offen in U_i)

Sie heißt Zariski-Topologie auf $\mathbb{P}_K^n$.

Homogene Polynome:

Def 4.2: Ein Polynom $P \in K[x_0, \dots, x_n]$

heißt homogen von Grad d , falls

$$P = \sum_{\substack{(i_0, i_1, \dots, i_n) \\ \in \mathbb{N}^{n+1}}} a_{i_0 i_1 \dots i_n} \cdot x_0^{i_0} \cdot x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}$$

wobei $\sum_{j=0}^n i_j = d \quad \forall (i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$, welche $a_{i_0 \dots i_n} \neq 0$ erfüllen.

Bsp: $x^2 y + y^3 + x y^2$ hom. vom Grad 3

$\underbrace{x^2 y}_{3} + \underbrace{y^3}_{3} + \underbrace{x y}_{2}$ nicht hom

Die Menge der hom. Polynome vom Grad d ist $K[x_0, \dots, x_n]_d$

Lemma 4.3.: K Körper, $F \in K[x_0, \dots, x_n]$

1.) F ist homogen vom Grad $d \Rightarrow$

$$\forall \lambda \in K^\times, \forall (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_K^{n+1}:$$

$$F(\lambda \cdot x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d \cdot F(x_0, \dots, x_n)$$

2.) " $\Leftarrow$ " gilt falls $|K| = \infty$

Beweis: Übung

Konsequenz: $F \in K[x_0, \dots, x_n]_d$, def.

$$V_+(F) := \left\{ (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_K^n \mid \right. \\ \left. F(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \right\}$$

$\forall F$ wohldefiniert (betrachte F keinen
wohldefinierten Funktionswert an dem
Punkt $(x_0: x_1: \dots: x_n)$ in $\mathbb{P}_K^n$ hat).

Sei $S \subset K[x_0, \dots, x_n]$ eine Menge
von homogenen Polynomen (von
eventuell verschiedenen Grad), dann:

$$V_+(S) := \left\{ (x_0: \dots: x_n) \in \mathbb{P}_K^n \mid F(x_0, \dots, x_n) = 0 \ \forall F \in S \right\}$$

Nenne $V_+(S)$ eine projektiv
algebraische Menge.

Def. 4.4.:

1.) Eine Ring R ist graduert

(durch $\mathbb{N}$) falls es eine Zerlegung

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \dots$$

von $(R_i)_{i \geq 0}$ s. d.

$$R_i \cdot R_j \subset R_{i+j}$$

$f \in R$ heißt homogen vom Grad d

$$(\Leftrightarrow) f \in R_d$$

$$\text{Bsp: } R = K[x_0, \dots, x_n] = \bigoplus_d K[x_0, \dots, x_n]_d$$

2.) Sei R ein graduierter Ring, sei M ein R -Modul. Dann heißt

M graduiert $(\Rightarrow)$ Zerlegung

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i \quad \text{von } (M_{i+j})$$

so daß $R_i \cdot M_j \subset M_{i+j}$.

$e \in M_d$ heißt homogen vom Grad d .

Lemma 4.5: R graduierter Ring, M ein endlich erzeugter R -Modul. Dann existiert ein Erzeugendensystem aus homogenen Elementen. Insbesondere gilt dies für Ideale $I \subset R$, solche ein

Ideal heißt homogen, falls
es von hom. Elementen erzeugt
wird ($\Leftrightarrow \exists$ ein graduier. als
Modul über R).

Äquivalent sind:

1.) I homogen, d.h. $I = (f_1, \dots, f_k)$

mit $f_i \in R_{d_i}$

2.) $\forall f \in I$: Sei $f = f_{(d)} + f_{(d-1)} +$
 $\dots + f_{(0)}$ (mit $f_{(i)} \in R_i$) die

Zerlegung von f in homogene Kom-
ponenten, dann gilt $f_{(i)} \in I$

3.) R/I ist ein graduierter

R -Modul

"Übergang von homogenen zu nicht-hom.
Polynomen (und andersherum):

Prop. 4.6: $\forall i \in \{0, \dots, n\}, d \in \mathbb{N} \exists$

bijektionen:

$$\Phi_i^{(d)} : K[x_0, \dots, x_n]_d \rightarrow K[x_0, \overset{\text{weggelassen}}{\hat{x}_i}, \dots, x_n]_{\leq d} :=$$

$$\{g \in K[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n] \mid \deg(g) \leq d\}$$

$$f \mapsto f(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$\phi_i^{(d)}$ heißt Dehomogenisierung bezgl. x_i .

Bew. konstruiere Umkehrabbildung

$$\psi_i^{(d)}: K[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]_{\leq d} \rightarrow K[x_0, \dots, x_n]_d$$

folgendermaßen: Sei

$$g(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^d g_{(j)} \in K[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]_{\leq d}$$

gegeben mit $g_{(j)} \in K[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]_j$

$$\text{Dann: } \psi_i^{(d)}(g) := \sum_{j=0}^d g_{(j)} \cdot x_i^{d-j}$$



Notation: Schreibe

$$\phi_i : K[x_0, \dots, x_n] \longrightarrow K[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$$

$$f = \sum_{j=0}^d f(j) \longmapsto \sum_{j=0}^d \phi_i^{(j)}(f(j))$$

Auch ϕ_i heißt Dehomogenisierung.
