

Kapitel 5: Maximal- und Primspektrum

Das Maximalspektrum

Def. 5.1: Sei R Ring.

1. Das Maximalspektrum von R ist

$$\operatorname{Spec}_m(R) := \left\{ \mathfrak{m} \subset R \mid \mathfrak{m} \text{ ist maximales Ideal in } R \right\}$$

2.) $\forall I \subset R$ Ideal sei

$$V(I) := \left\{ \mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}_m(R) \mid I \subset \mathfrak{m} \right\} \subset \operatorname{Spec}_m(R)$$

3.) Die Zariski-Topologie auf $\operatorname{Spec}_m(R)$

ist nach Def die Topologie, deren abgeschlossene Mengen genau die Mengen $V(I) \subset \operatorname{Spec}_m(R)$ sind.

4.) Für jede Teilmenge

$X \subset \operatorname{Specm}(R)$ sei

$$I(X) := \bigcap_{m \in X} m \subset R$$

das Verschwindungsideal von X

Bem. 1.) Sei K ein alg. abgeschlossener

Körper und sei $R_n = K[x_1, \dots, x_n]$, dann

gilt nach Prop. 2.16: $\operatorname{Specm}(R_n) = A_K^n$.

Allgemeiner (falls $K \subset \bar{K}$) ist

$$A_K^n \hookrightarrow \operatorname{Specm}(R_n)$$

Falls $I \subset R_n$ ein Ideal ist, dann

hatten wir $X := V(I) \subset \mathbb{A}_K^n$ definiert
 (Verschwindungsort aller Polynome in I),
 sowie Koordinatenring $K[X] = R_n / I =: R$
 Setze (zur Unterscheidung):

$$X_m := V(I) \subset \operatorname{Specm}(R_n)$$

dann gilt unter $\mathbb{A}_K^n \hookrightarrow \operatorname{Specm}(R_n)$:

$$X \subset X_m \text{ und } X_m \cong \operatorname{Specm}(R).$$

Beim: betrachte $\varphi: R_n \twoheadrightarrow R_n / I = R$

$$\text{induziert: } \begin{array}{ccc} \varphi^*: \operatorname{Specm}(R) & \hookrightarrow & \operatorname{Specm}(R_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ m & \longmapsto & \varphi^{-1}(m) \end{array}$$

wohldefiniert, denn wenn $m \subset R = R_n / I$ max.

dann muß auch $\varphi^{-1}(m) \in R_n$
 maximal sein. (falls nicht, wäre
 $\varphi^{-1}(m) \subsetneq J \subsetneq R_n \Rightarrow m \subsetneq \varphi(J) \subsetneq R$ $\textcircled{?}$)

Klar: $\text{Im}(\varphi^*) = \underbrace{\{m \in \text{Spec}_n(R_n) \mid m \supseteq I\}}_{= V(I) = X_m}$

φ^* injektiv $\Rightarrow \varphi^*: \text{Spec}(R) \xrightarrow{\sim} X_m$

Homöomorphismus,

Bsp: Sei $R = \mathbb{R}[x]$ ($\mathbb{R} \neq \overline{\mathbb{R}}$). Wir haben

Inklusion: $\mathbb{R} \hookrightarrow \text{Spec}(\mathbb{R}[x])$
 $1 \mapsto (x-1)$

nicht bijektiv, denn z.B. $(x^2+1) \in R$
 ist maximal

klassifiziere maximale Ideale in $\mathbb{R}[x]$:

Bekannt: $f \in \mathbb{R}[x]$ ist irreduzibel $\Rightarrow$

$$\deg(f) = 1 \quad \text{oder} \quad \deg(f) = 2 \text{ und} \\ f = (x - \lambda) - (x - \bar{\lambda}) \text{ für} \\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{Specm}(\mathbb{R}[x]) = \mathbb{C} \setminus \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$$

wobei $\sigma \neq \text{id} \in \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ durch

$$\sigma: \lambda \mapsto \bar{\lambda} \quad \text{operiert.}$$

Beachte: falls $\lambda \in \mathbb{C}$ sogar eine
reelle Zahl ist $\Rightarrow \sigma(\lambda) = \lambda$

$$\text{konkret: } \mathbb{C} / \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{ \{\lambda, \bar{\lambda}\} \mid \lambda \in \mathbb{C} \}$$

2.) Sei $R = \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ enthält
gar keinen Körper)

klar: $\text{Spec}(\mathbb{Z}) = \{ (p) \mid p \text{ Primzahl} \}$

Notation: 1.) Sei R ring, $X = \text{Spec}(R)$

Ein Element x in X kann entweder
als Punkt von X gesehen werden,

schreibe $x \in X$, oder aber als

maximales Ideal in R , schreibe

$m_x \subset R$ oder $m_x \in X = \text{Spec}(R)$.

2.) Erinnerung: Für $X \subset \mathbb{A}_k^n$ affin-alg.
haben wir $\mathcal{O}_{X,x}$ und $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_{X,x}$
definiert.

Verallgemeinerung: Sei R Ring
und $X = \bigcup_{x \in X} \text{Spec}(R) = X$.

Setze $\kappa(x) := R / \mathfrak{m}_x$, $\kappa(x)$ heißt
auch Restklassenkörper.

3.) Falls $K = \bar{K}$ und falls R eine
endliche erzeugte K -Algebra ist $\Rightarrow$

$\forall x \in \text{Spec}(R)$ ist $\kappa(x) \simeq K$:

Man hat $K \hookrightarrow R \twoheadrightarrow R / \mathfrak{m}_x =: \kappa(x)$
($= R_u / \mathfrak{I}$)

d.h. $\kappa(x)$ ist Körpererweiterung.

Erweiterung von K . Aber R und dann
auch $\kappa(x)$ sind endlich-erzeugte

K -Algebren $\xrightarrow{2.10} \kappa(x)/K$ endlich

$\Rightarrow \kappa(x)/K$ algebraisch $\xrightarrow{K=\bar{K}} \kappa(x) \cong K$.

4.) 3.) stimmt nicht falls $K \neq \bar{K}$:

Sei $R = \mathbb{R}[x]$, falls $m = (x-1) \Rightarrow$

$R/m \cong \mathbb{R}$, falls $m = (f)$ $\deg f = 2$

f irreduzibel $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x]/(f) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \lambda \end{array}$$

wobei $f(1)=0$, $\Rightarrow$ für $m_x=(f)$ mit $\deg f \geq 1$
in $\kappa(x) \neq \mathbb{R}$ sondern $\kappa(x) = \mathbb{C}$.

5.) $R = \mathbb{Z}$, $x = (p) \in \text{Specm}(R)$, p Primzahl

$\Rightarrow \kappa(x) = \mathbb{Z}/(p) = \mathbb{F}_p$ Körper mit
 p Element.

Ziel: Nullstellensatz für Maximalspektrum

Def.-Lemma 5.3: Sei R Ring.

1.) Das Nilradikal ist

$$\text{nil}(R) := \left\{ f \in R \mid \exists n: f^n = 0 \right\} \subset R$$

Klar: $\text{nil}(R) = \overline{I(0)}$

2.) $\forall I \subset R$ gilt

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{p \in R \text{ Primideal} \\ I \subset p}} p$$

$\sqrt{I} = \{p \in R \mid \exists n: p^n \in I\}$

3.) $\text{nil}(R) = \bigcap_{\substack{p \in R \\ \text{Primideal}}} p$

4.) Schreibe $R_{\text{red}} := R / \text{nil}(R)$

R_{red} heißt Reduktion von R

mit $\pi: R \rightarrow R_{\text{red}}$

Vorbereitung zum Beweis.

Lemma 5.4: R Ring, sei $S \subset R$
ein multiplikatives System. Sei

$J \subset R$ ein Ideal, welches maximal
ist unter allen Idealen, welche
disjunkt von S sind. Dann ist
 J ein Primideal.

Beweis: Seien $f, g \in R \setminus J, z \in J$.

$f \cdot g \notin J$. Wegen Maximalität von J

$$(J + (f)) \cap S \neq \emptyset \quad (J + (g)) \cap S \neq \emptyset$$

d.h. $\exists$ Elemente:

$$a \cdot f + x, b \cdot g + y \in S$$

$$\text{mit } a, b \in R, x, y \in \mathcal{I}$$

Angenommen: $f \cdot g \in \mathcal{I}$

$$\Rightarrow (a f + x)(b g + y) \in S$$

$$= \underbrace{(a f)(b g)}_{\substack{\in \mathcal{I} \\ \text{weil } f \cdot g \in \mathcal{I}}} + \underbrace{(a f) \cdot y}_{\in \mathcal{I}} + \underbrace{(b g) \cdot x}_{\in \mathcal{I}} + \underbrace{x \cdot y}_{\in \mathcal{I}}$$

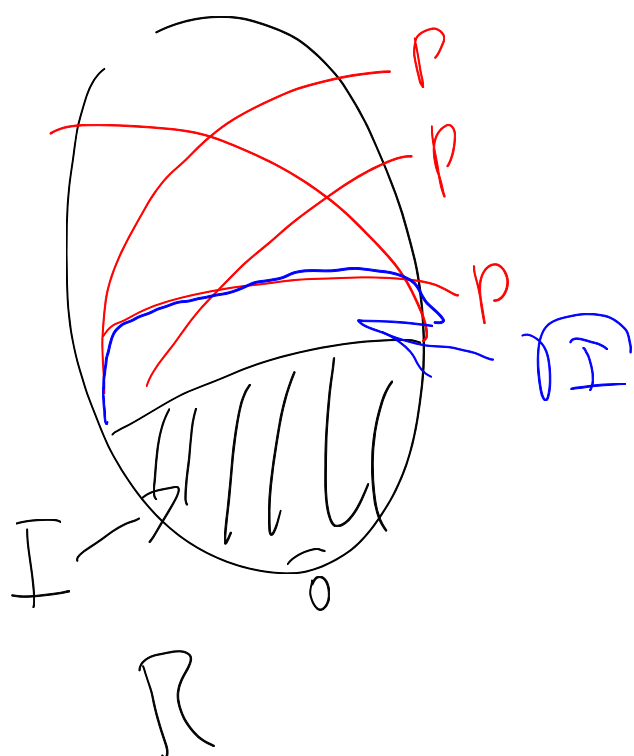
mit Ideal

$$\Rightarrow (a f + x) \cdot (b g + y) \in S \cap \mathcal{I}$$



Beweis von Lemma 5.3: $I \subset R$

$$\text{z.z.: } \sqrt{I} = \bigcap_{\substack{I \supset p \\ p \text{ prim}}} p$$



" $\subset$ ": Sei $f \in R$ mit $f \in \sqrt{I}$, d.h. $f^n \in I$

für ein $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f^n \in p \quad \forall p \supset I$

$\begin{matrix} p \cdot (f \dots f) \\ f \cdot f^{n-1} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{"} \\ p \text{ prim} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \rightarrow f \in p \\ \rightarrow f^{n-1} \in p: \text{Induktion} \end{matrix}$

$$\Rightarrow \forall p \supset I: f \in p \text{ also}$$

$$f = \bigcap_{p \supset I} p$$

3. Sei $f \notin \sqrt{I}$, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$f^n \notin \underline{I} \Rightarrow S := \{f^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap I = \emptyset$$

Sei J ein maximales Element der Menge aller Ideale, welche disjunkt zu S sind (solch ein J konstruiert man mittels Zornschem Lemma)

$\stackrel{\text{S. 6}}{\implies} J \text{ ist Primideal in } R$

$J \supset I, J \cap S = \emptyset$, also

$$f \notin J \implies f \notin \bigcap_{\substack{I \subset P \\ P \text{ prim}}} P$$

also $\bigcap_{P \supset I, P \text{ prim}} P \subset \sqrt{I}$, also insgesamt

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{P \supset I \\ P \text{ prim}}} P$$

$$\bigcap_{P \text{ prim}} P = \bigcap_{\substack{(0) \subset P \\ P}} P \stackrel{2.)}{=} \sqrt{(0)} = \text{nil}(R)$$

□

Satz 5.5. (Nullstellensatz

starke Fassung, Version für Maximal-
spektren)

Sei K Körper, R endlich-erzeugte

K -Algebra. Dann gilt $\forall I \subset R$:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{m \subset R \\ \text{maximal} \\ I \supset m}} m = I(V(I))$$

$\uparrow \quad \nearrow$
 $I(-), V(-)$ gemäß
Def. 5.1

Bsp: $R = \mathbb{R}[x]$, $I = (x^2 + 1) \subset R$ quadratisch

$$\Rightarrow \sqrt{I} = I$$

$$V(I) = \emptyset \Rightarrow I(V(I)) = I(\emptyset) = \overline{R[x]} = \overline{I}$$

$\uparrow$
 nach Krull'scher
 Def. Prop. 2

$$V(I) = \{I\} \subset \text{Specm } R[x]$$

$\uparrow$
 nach Def 5.1

$$I(V(I)) = I = \overline{I} \quad \checkmark$$

Vorbereitung zum Beweis:

Lemma 5.6: K Körper, R endlich-
 erzeugte K -Alg. Dann gilt $\forall p \in R$ prim.

$$p = \bigcap_{m \in p \text{ max}} m$$

Beweis: Sei $p \in R$ Primideal,

Beachte $R \rightarrow R/p$

$p \rightarrow \text{Integritätsbeweis}$
 (0)

Korrespondenz: $\{\text{Ideale in } R/p\} \leftrightarrow \{\text{Ideale in } R, \text{ welche } p \text{ enthalten}\}$

Also reicht es, das Lemma für
den Fall R Integritätsbeweis zu zeigen,
und für den Fall $p = (0)$

Korollar: R Int. ring $\Rightarrow$
 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} p_n = (0)$

Angenommen: $\exists x \neq 0 : \forall m \in \mathbb{R} \text{ max:}$
 $x \in \mathbb{R}$

Betrachte: $R' := \underline{R[x^{-1}]} = R_x \cong R[y]/(xy-1)$

$\leadsto R'$ endl. erzeugte K -Hlg.

Sei $\mathfrak{n} \in R'$ max. Ideal $\Rightarrow \underline{L := R'/\mathfrak{n}}$

Körper $\leadsto L/K$ Körpererw.

2.10 $\Rightarrow L'/K$ endlich

Betrachte,

$$\varphi: R \rightarrow R[x^{-1}] \twoheadrightarrow L$$

Sei $L' := \text{Im}(\varphi)$

L' ist Integritätsring

$\leadsto R \subset L'$ ist ganze Ringerweiterung
von Integritätsringen

Q. 13.
 $\implies L'$ ist auch Körper

$\varphi: R \rightarrow L'$ ist surjektiv

$\implies \ker(\varphi) \subset R$ maximal

Beh: $x \notin \ker(\varphi)$

Ang. $x \in \ker(\varphi) \implies x \in \mathfrak{m} \subset R' \nmid$

x ist in R' invertierbar

$$\text{also } x \in \ker(q) \quad \wedge \quad x \in \bigcap_{\substack{m \in \mathbb{R} \\ \text{max}}} m$$

$$\text{also } \bigcap_{\substack{m \in \mathbb{R} \\ \text{max}}} m = (0)$$

□

Bew 5.5: Schreibe alles zusammen.
