

Übungsblatt Nr. 3

Besprechung in der Woche ab 01.11.

Aufgabe 3.1: Zerfallsprozesse des Z -Bosons

Z -Bosonen zerfallen laut SM mit den folgenden Verzweigungsverhältnissen $\text{BR}(i \rightarrow f) \equiv \frac{\Gamma_{fi}}{\Gamma_i}$ in Paare von elektrisch geladenen Leptonen $\ell = e, \mu, \tau$, Neutrinos $\nu = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ und Quarks $q = u, d, s, c, b$ (die Paare enthalten immer ein Teilchen und ein Antiteilchen der **gleichen** Generation): (2 Punkte)

- $\text{BR}(Z \rightarrow \ell^+ \ell^-) = 10\%$
- $\text{BR}(Z \rightarrow \nu \bar{\nu}) = 20\%$
- $\text{BR}(Z \rightarrow q \bar{q}) = 70\%$

Wie würden sich diese Verzweigungsverhältnisse und die mittlere Lebensdauer τ des Z -Bosons ändern, wenn es eine vierte Neutrinofamilie gäbe, in die das Z genauso wahrscheinlich zerfällt, wie in die anderen Neutrinos? Berechnen Sie die **neue** Lebensdauer (in Sekunden).

Hinweis: Die SM-Breite des Z -Bosons finden Sie im [PDG](#).

Aufgabe 3.2: Nichtrelativistischer Grenzfall der Dirac-Spinoren

(1 Punkt)

Für die Dirac-Gleichung sind in der Vorlesung zwei Teilchen-Lösungen dargestellt worden:

$$u_+ = N_1 \begin{pmatrix} c \\ s e^{i\phi} \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} c \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} s e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad u_- = N_2 \begin{pmatrix} -s \\ c e^{i\phi} \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} s \\ -\frac{|\vec{p}|}{E+m} c e^{i\phi} \end{pmatrix},$$

mit $c \equiv \cos(\theta/2)$ und $s \equiv \sin(\theta/2)$.

Betrachten Sie diese im nicht-relativistischen Grenzfall $\beta \ll 1$. Zeigen Sie, dass die beiden unteren Komponenten in diesem Fall gegenüber den oberen Komponenten unterdrückt sind, und zwar um einen Faktor proportional zu β .

(Dies ermöglicht vereinfachte Berechnungen für nichtrelativistische Näherungen, und gilt genau umgekehrt auch für die Lösungen v_+ und v_- . Im relativistischen Fall wiederum sind alle Komponenten von vergleichbarer Größe.)

Aufgabe 3.3: Spinor-Normierung und Spin-Eigenzustände

Ein Fermion bewege sich in p_z -Richtung.

- Schreiben Sie die 4 Spinorlösungen für diesen Spezialfall auf und finden Sie die Normierungskonstanten N_i der Spinoren unter der Bedingung (Konvention) $u^\dagger u = 2E$. (1 Punkt)
- Zeigen Sie, dass diese auch Eigenspinoren des Spin-Operators $\hat{S}_z$ sind und finden Sie die dazugehörigen Eigenwerte. (1 Punkt)

- c) Der Hamilton-Operator für ein freies Dirac-Teilchen lässt sich schreiben als:

(1 Punkt)

$$\hat{H} = \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta m$$

Zeigen Sie, dass $\hat{H}$ in diesem Fall mit dem Spin-Operator $\hat{S}_z$ vertauscht.

Aufgabe 3.4: Chiralität und Helizität

Zusätzlich zu den vier Dirac-Matrizen sei eine fünfte folgendermaßen definiert:

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (\text{Chiralitätsoperator}).$$

- a) Haben die Lösungen der Dirac-Gleichung einen definierten Chiralitätseigenwert?

(1 Punkt)

(Hinweis: Es genügt auch, wenn Sie statt der allgemeinen nur die p_z -bewegten Spinoren aus Aufgabe 3.3 betrachten.)

- b) Ändert sich dies im Grenzfall vernachlässigbarer Massen ($m \ll E$)? Vergleichen Sie dann die Eigenwerte für Chiralität und Helizität.

(1 Punkt)

Aufgabe 3.5: Parität von Dirac-Fermionen

(1 Punkt)

Der Paritätsoperator (Raumspiegelung) $P : (x, y, z, t) \rightarrow (-x, -y, -z, t)$ lässt sich auf Spinoren als $\hat{P} = \gamma^0$ anwenden. Zeigen Sie, dass ein ruhendes Elektron ein Eigenzustand des Paritätsoperators ist und bestimmen Sie seinen Eigenwert.